Technische Universität Berlin **SoSe 2011**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Doz.: Böse, Goßler, Gündel vom Hofe, Krumbiegel
Ass.: Kurt, Méndez, Sète

Lösung zur Oktober-Klausur „Analysis 1 für Ingenieure“ Verständnisteil

---

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) (2 Punkte) Es gilt $h'(t) = -3e^{-3t} < 0, \forall t \in \mathbb{R}$, also folgt nach dem Monotoniekriterium der 1. Ableitung dass h (streng) monoton fallend ist. Alternativ: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $t \mapsto e^t$ monoton wachsend ist, daraus folgt auch dass h monoton fällt.

(b) (5 Punkte) Durch Einsetzen von geeigneten zwei Punkten mit gleichem Betrag aber unterschiedlichem Vorzeichen (z.B. $t = 1$ und $-t = -1$) direkt nachrechnen dass $f(t) \neq f(-t)$, und $f(t) \neq -f(-t)$.
Nullstellen: $f(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Hier sind die Lösungen genau für $k = 0, 1, 2$ im Intervall $[0, \pi]$. Lösungen sind also $t_1 = \frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_3 = \frac{5\pi}{6}$.

(c) (3 Punkte) Es gilt für den Randwert $f(0) = \cos(0)e^0 = 1$. Weiter gilt $\cos(3t) \in [-1, 1]$, und e^{-3t} fällt streng monoton, somit ist $f(t) < 1$ für alle $t > 0$. Somit liegt das Maximum im Punkt 0 und der Funktionswert des Maximums ist 1. (Anmerkung: Die entscheidenden Punkte sind Monotonie von h, Beschränktheit des Cosinus, Berücksichtigung der Randwerte und Berechnung des Wertes).

Aufgabe 5 (12 Punkte)

(a) (5 Punkte) f ist auf $]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ stetig, da $x \mapsto \tan(x)$ und $x \mapsto 1/x$ dort stetig sind. Untersuche Stetigkeit in 0: L'Hospital führt auf $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2(x)}{1}$. Da $1 + \tan^2(0) = 1$ ist folgt $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$. Man muss also $a = 1$ wählen, dann ist f auf ganz $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ stetig. Alternativ: Ableitung des Tangens $\frac{1}{\cos^2(x)}$.
Andere Lösungsmöglichkeit, gibt gleich viele Punkte: f ist auf $]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ stetig, da $x \mapsto \tan(x)$ und $x \mapsto 1/x$ dort stetig sind. Untersuche Stetigkeit in 0: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)}$ der zweite Faktor geht gegen und aus der Vorlesung ist bekannt dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ist. Daraus folgt ebenfalls dass $a = 1$ ist.

(b) (7 Punkte) f ist auf $]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ differenzierbar, als Produkt differenzierbarer Funktionen Untersuche Differentialquotient in 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2}$$

Mit l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \tan^2(x) - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{2x}$$

Da $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ (aus Teil (a)) und $\lim_{x\to 0} \tan(x) = 0$ folgt $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{2x} = 0$ (kann alternativ mit nochmaliger Anwendung von l'Hospital bewiesen werden). Somit existiert

der Grenzwert, also ist f in 0 differenzierbar, und $f'(0) = 0$.
Alternativ: Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = \frac{(1+\tan^2(x))x - \tan(x)}{x^2}$. Im Grenzwert für $x \to 0$ führt l'Hospital und ein bisschen rechnen ebenfalls aufs richtige Ergebnis. Setzt man als Ableitung für den Tangens $\frac{1}{\cos^2(x)}$ ein, so wird die Rechnung mühsamer, führt aber natürlich auch auf das richtige Ergebnis.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

(a) (4 Punkte) Der Mittelwertsatz besagt, dass es ein $c \in [\pi/4, \pi/2]$ gibt, so dass $\frac{f(\pi/2)-f(\pi/4)}{\pi/2-\pi/4} = f'(c)$ ist). Eingesetzt in unserem Fall ergibt das $\frac{\sin(\pi/2)-\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \cos(c)$. Da $\sin(\pi/2) = 1$ ist, ist das äquivalent zu $1 - \sin(\pi/4) = \frac{\pi}{4}\cos(c)$. Diese Gleichung ist durch Umformen äquivalent zu $\frac{\pi}{4}\cos(c) + \sin\frac{\pi}{4} = 1$. (Anmerkung: Die Äquivalenz muss irgendwie ersichtlich sein, zumindest die benötigte Richtung der Implikation).
Alternativ: Auflösen nach x ergibt $x = \arccos\left(\frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}\right)$. Durch geschicktes Abschätzen kann man zeigen dass das im angegebenen Intervall eine Lösung hat. Diese Lösung gibt eine Punkt weniger, da in der Aufgabenstellung explizit Anwendung des Mittelwertsatzes gefordert war.

(b) (4 Punkte) Mit dem Mittelwertsatz gibt es ein $c \in [0,1]$ so dass $\frac{g(1)-g(0)}{1-0} = g'(c)$ ist. Das ist äquivalent zu $g(1) - g(0) = g'(c)$). Da nach Voraussetzung $g(1) - g(0) > 0$ ist, folgt aus dieser Gleichung $g'(c) > 0$.
Alternativ: Da $g(1) - g(0) > 0$ und g stetig ist, muss es ein Intervall $[a,b] \subset [0,1]$ geben, auf dem g streng monoton wächst. Für alle c aus diesem Intervall gilt dann wegen dem Monotoniekriterium der ersten Ableitung $g'(c) > 0$. Hier war der Mittelwertsatz nicht vorgegeben, somit geben beide Lösungen gleich viele Punkte.