Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: Gündel-vom Hofe, Mehl, Penn-Karras, Schneider
Ass.: Altmann, Tölle

WS 11/12
20. Feb 2012

Februar – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

<u>**Rechenteil**</u>

1. Aufgabe
11 Punkte

(a) Für welche **reellen** Zahlen x gilt $\frac{|2x-3|}{x} \leq 4$?

(b) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $\ln\left(\sqrt[3]{x^4}\right) = \ln x^{1/3} - 9$.

(c) Berechnen und skizzieren Sie alle **komplexen** Lösungen z der Gleichung: $z^3 = 8i$ in der Form $z = a + bi$.

(d) Berechnen Sie alle **komplexen** Zahlen z, für die gilt: $\mathrm{Re}(z + 27i) = 2iz + 3$.

2. Aufgabe
10 Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(\sin(x))\cos(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} te^{-t}\,dt$

Hinweis: $\sin(1)$ muss nicht weiter berechnet oder gerundet werden.

3. Aufgabe
10 Punkte

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 1 + \cos(2x)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 von f an der Stelle $x_0 = \pi/4$.

(b) Bestimmen Sie das dazugehörige Restglied.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{f(x)}{(x-\pi/2)^2}.$$

<u>**Verständnisteil**</u>

4. Aufgabe
10 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0$ und die Funktion f gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \geq 0 \\ x^3 + a^2x + b, & x < 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f für $x > 0$.

(b) Für welche Parameter a, b ist die Funktion f auf dem gesamten Definitionsbereich stetig?

(c) Für welche Parameter a, b ist die Funktion f sogar differenzierbar?

5. Aufgabe
11 Punkte

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(1/x)$ und die Folge $a_n = \frac{1}{n\pi}$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ und $\lim_{n\to\infty} f(-a_n)$. Folgt daraus, dass f stetig fortsetzbar an der Stelle $x = 0$ ist?

(b) Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Gilt dann immer $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -1$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(c) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 7n^2 + e^{-2n}}{8n^2 - n + 1}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \sin(-x)}{x + \cos(x)}.$$

6. Aufgabe
10 Punkte

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_2^7 f(x)\,dx = 0$. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle im Intervall $[0, 10]$ besitzt.

(b) Sei p die Funktion $p(x) := x^6 - 5x^2 + 3$. Zeigen Sie, dass p eine Nullstelle im Intervall $[-1, 1]$ besitzt.