Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 11/12
Doz.: Gündel-vom Hofe, Mehl, Penn-Karras, Schneider 31. März 2012
Ass.: Altmann, Tölle

März/April – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Sei $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(2x + 2)$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom T_3 vom Grad 3 für f an der Stelle $x_0 = 0$.

(b) Stellen Sie das dazugehörige Restglied R_3 auf.

(c) Für welche $x > 0$ gilt $|T_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{100}$?

2. Aufgabe 11 Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\, dx \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{2x-1}{x^2 - x}\, dx \qquad \text{(c)} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{2x^3}\, dx.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Funktion mit

$$g(x) = 1 - |x - 1|, \; x \in [0, 2[.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion g im Intervall $[-1, 3]$.

(b) Ist die Funktion g gerade, ungerade oder weder noch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von g.

Verständnisteil

4. Aufgabe 9 Punkte

(a) Für welche **reellen** Zahlen x gilt $|x^2 - 1| \geq 1$?

(b) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $\cosh(x) + \sinh(x) = e^2$.

(c) Geben Sie die **komplexe** Zahl $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} - 2$ in kartesischen und Polarkoordinaten an.

(d) Berechnen Sie alle **komplexen** Zahlen z, für die gilt: $\mathrm{Im}(2 + z + 4i) = 4 - i + z$.

5. Aufgabe 11 Punkte

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^2n^2 + e^{-n/2}}{an^2 + bn + 2}, \; a, b > 0, \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-i)^n}{3n}.$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel folgende Aussage:
Der Quotient zweier Nullfolgen ist wieder eine Nullfolge.

6. Aufgabe 11 Punkte

(a) Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Ungleichung $n! \leq n^n$ gilt.

(b) Gesucht ist ein Polynom p mit den Eigenschaften:

- p ist ein reelles Polynom vom Grad 4
- p hat Nullstellen bei $x_0 = i$ und $x_1 = 2$,
- p besitzt eine doppelte Nullstelle.

Existiert solch ein Polynom? Geben Sie ein Beispiel an oder begründen Sie warum es nicht existieren kann.