Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: Gündel-vom Hofe, Mehl, Penn-Karras, Schneider
Ass.: Altmann, Tölle

WS 11/12
31. März 2012

März/April – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe

10 Punkte

Sei $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(2x+2)$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom T_3 vom Grad 3 für f an der Stelle $x_0 = 0$.

- Berechnung der Ableitungen bis Ordnung 3

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

- Taylorpolynom

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = \ln(2) + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

(b) Stellen Sie das dazugehörige Restglied R_3 auf.

- Berechnung der 4. Ableitung

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$$

- $R_3(x) = \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)x^4$ mit einem ...
- ... $\xi \in [0,x]$ oder $\xi \in [x,0]$.

(c) Für welche $x > 0$ gilt $|T_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{100}$?

- $R_3 = f - T_3$
- Also $|T_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{100} \iff \left| -\frac{1}{4}\frac{x^4}{(\xi+1)^4} \right| \leq \frac{1}{100} \iff \frac{x^4}{(\xi+1)^4} \leq \frac{1}{25}$.
- ξ liegt zwischen 0 und $x \geq 0$. Daher gilt $\frac{x^4}{(\xi+1)^4} \leq \frac{x^4}{(0+1)^4} = x^4$.
- $|T_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{100}$ gilt also zumindest für alle $x \leq \sqrt[4]{1/25} = \sqrt{1/5}$.

(a)-(b) zusammen 6 Punkte
(c) 4 Punkte

2. Aufgabe 11 Punkte

(a) Berechnen Sie $\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\ dx$.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\ dx \text{ Substitution } y = \sqrt{x}, dx = 2y\ dy \\
=&\int_0^{\pi} \cos(y) 2y\ dy \\
=&2y\sin(y)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin(y)\ dy \\
=&0 - 4
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie $\int \frac{2x-1}{x^2-x}\ dx$.

- Ansatz Partialbruchzerlegung $\frac{2x-1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$
- Koeffizientenvergleich ergibt $A = B = 1$.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x-1}{x^2-x}\ dx \\
=&\int \frac{1}{x}\ dx + \int \frac{1}{x-1}\ dx \\
=&\ln|x| + \ln|x-1| + c \\
=&\ln|x^2-x| + c
\end{aligned}$$

(geht auch ohne Partialbruchzerlegung direkt, wenn man die Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$ erkennt)

(c) Berechnen Sie $\int_1^{\infty} \frac{1}{2x^3}\ dx$.

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\infty} \frac{1}{2x^3}\ dx \text{ uneigentliches Integral} \\
=&\lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{2x^3}\ dx \\
=&\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{4}x^{-2}\Big|_1^b \right) \\
=&\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{4}b^{-2} + \frac{1}{4} \right) \\
=&1/4
\end{aligned}$$

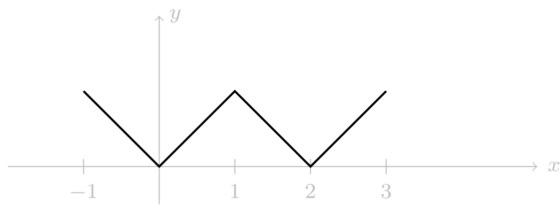
(a) 4 Punkte
(b) 4 Punkte
(c) 3 Punkte

3. Aufgabe 10 Punkte

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Funktion mit

$$g(x) = 1 - |x-1|, \; x \in [0, 2[.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion g im Intervall $[-1, 3]$.



(b) Ist die Funktion g gerade, ungerade oder weder noch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Funktion ist gerade
- g lässt sich auch beschreiben durch $g(x) = |x|, \; x \in [-1, 1[$.
  Betragsfunktion ist gerade.

(c) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von g.

- Ansatz $\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$
- Erkennen, dass $T = 2$, Berechnung $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$
- Da g gerade ist, gilt $b_k = 0$ für alle k
- Berechnung a_0:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\;dx = \int_0^2 g(x)\;dx = 2\int_0^1 1 - |x-1|\;dx = 2\int_0^1 x\;dx = 1.$$

  Berechnung a_k, $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\cos(k\omega x)\;dx \\
&= \int_0^2 g(x)\cos(k\pi x)\;dx \\
&= 2\int_0^1 x\cos(k\pi x)\;dx \\
&= 2\frac{x}{k\pi}\sin(k\pi x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\;dx \text{ (partielle Int)} \\
&= 0 + 2\frac{1}{k^2\pi^2}\Big(\cos(k\pi) - 1\Big) \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{k^2\pi^2}, & \text{falls k ungerade} \\ 0, & \text{falls k gerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

(a) 1 Punkte
(b) 2 Punkte
(c) 7 Punkte

Verständnisteil

4. Aufgabe

9 Punkte

(a) Für welche **reellen** Zahlen x gilt $|x^2 - 1| \geq 1$?

- Fall 1: $x^2 - 1 \geq 0$. In dem Fall ist die Gleichung äquivalent zu $x^2 \geq 2$. Somit ergibt sich als Lösungsmenge $\mathbb{L}_1 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$.
- Fall 2: $x^2 - 1 < 0$. In dem Fall ist die Gleichung äquivalent zu $-x^2 + 1 \geq 1$, also $x^2 \leq 0$. $\mathbb{L}_2 = \{0\}$.

  Gesamtlösungsmenge $\mathbb{L} =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, \infty[$

(b) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $\cosh(x) + \sinh(x) = e^2$.

$$\begin{aligned} & \cosh(x) + \sinh(x) = e^2 \\ \iff & \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^2 \\ \iff & e^x = e^2 \\ \iff & x = 2. \end{aligned}$$

(c) Geben Sie die **komplexe** Zahl $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} - 2$ in kartesischen und Polarkoordinaten an.

- Umwandlung in kartesische Koord: $\sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = 1 + i$.

  Ergebnis $z = 1 + i - 2 = -1 + i$
- Umwandlung in Polarkoordinaten: $z = re^{i\varphi}$ mit

  Betrag $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

  Winkel $\varphi = \pi + \arctan(-1)$

(d) Berechnen Sie alle **komplexen** Zahlen z, für die gilt: $\text{Im}(2 + z + 4i) = 4 - i + z$.

- Ansatz $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \text{Im}(2 + a + bi + 4i) = 4 - i + a + bi \\ \iff & 4 + b = 4 + a + i(b - 1) \end{aligned}$$

- Aufteilung Real- und Imaginärteil ergibt die beiden Gleichungen $4 + b = 4 + a$ und $0 = b - 1$. Somit ergibt sich $a = b = 1$, also $\mathbb{L} = \{1 + i\}$.

(a) 2 Punkte
(b) 2 Punkte
(c) 3 Punkte
(d) 2 Punkte

5. Aufgabe 11 Punkte

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$, (ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^2n^2 + e^{-n/2}}{an^2 + bn + 2}$, $a, b > 0$, (iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-i)^n}{3n}$.

(i) Ableitung $(2^x)' = (e^{x\ln(2)})' = \ln(2)e^{x\ln(2)} = \ln(2)2^x$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\ln(2)2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\ln^2(2)2^x} = 0.$$

(ii) - Umformung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^2n^2 + e^{-n/2}}{an^2 + bn + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2 + e^{-n/2}/n^2}{a + b/n + 2/n^2}$$

- Bemerkung zu Einzelgrenzwerten, u.a. $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n/2}}{n^2} = 0$
- Ergebnis $= a$

(iii) - Zähler ist beschränkt: $|1 + (-i)^n| \leq 2$.
- Nenner wächst unbeschränkt und daher Ergebnis $= 0$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel folgende Aussage:
Der Quotient zweier Nullfolgen ist wieder eine Nullfolge.

- Falsch.
- Gegenbeispiel: $a_n = 1/n, b_n = 1/n^2$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0.$$

(a) 4+3+2 Punkte
(b) 2 Punkte

6. Aufgabe 11 Punkte

(a) Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Ungleichung $n! \leq n^n$ gilt.

- Induktionsanfang: $(n = 1)$ $1 \leq 1^1$ stimmt.
- Induktionsvoraussetzung: Es gilt $n! \leq n^n$ für ein beliebiges aber festes $n \geq 1$.
- Induktionsbehauptung: $(n + 1)! \leq (n + 1)^{(n+1)}$
- Induktionsschritt: $(n+1)! = (n+1) \cdot n! \underset{\text{IV}}{\leq} (n+1) \cdot n^n \leq (n+1) \cdot (n+1)^n = (n+1)^{(n+1)}$.

(b) Gesucht ist ein reelles Polynom p vom Grad 4 mit den Eigenschaften:
- p hat Nullstellen bei $x_0 = i$ und $x_1 = 2$,
- p besitzt eine doppelte Nullstelle.

Existiert solch ein Polynom? Geben Sie ein Beispiel an oder begründen Sie warum es nicht existieren kann.

- p ist reell also ist neben i auch $-i$ eine Nullstelle.

  $i, -i$ können keine doppelten Nullstellen sein, da es sonst 5 Nullstellen gibt. Somit ist 2 eine doppelte Nullstelle.
- Beispiel $p(x) = (x - i)(x + i)(x - 2)^2 = (x^2 + 1)(x - 2)^2 = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$.

(auch ok: Angabe eines Beispiels MIT Nachweis, dass alle Eigenschaften erfüellt)

(a) 6 Punkte
(b) 5 Punkte