Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: Bärwolff, Mehl, Penn-Karras
Ass.: Altmann, Meiner, Wassmuss

WS 12/13
18. Feb 2013

Februar – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \ln(x)/x^2$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und die Nullstellen von f.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to 0} f(x)$.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f. Gibt es ein globales Maximum? Gibt es ein globales Minimum?

(Hinweis: Für die zweite Ableitung gilt: $f''(x) < 0$ für $x < e^{5/2}$ und $f''(x) > 0$ für $x > e^{5/2}$.)

Lösung:

a) [2 Punkte] Es gilt $D_{\ln x} =]0, \infty[$ und $D_{1/x^2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$. Der maximale Definitionsbereich ist deshalb $D =]0, \infty[$.
Nullstellen: $\ln(x) = 0$, also $x = 1$.

b) [3 Punke] Nach l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

und wegen $\lim_{x\searrow 0} \ln x = -\infty$ und $\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty.$$

c) [5 Punkte]

$$f(x) = \ln x \cdot x^{-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} x^{-2} - 2(\ln x \cdot x^{-3}) = x^{-3}(1 - 2\ln x)$$

f ist differenzierbar auf D_f, daher sind alle Extrema Nullstellen der ersten Ableitung.

$$f'(x) = x^{-3}(1 - 2\ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2\ln x \Leftrightarrow x = \sqrt{e}.$$

Mit Hinweis folgt, dass f bei $x = \sqrt{e}$ ein lokales Maximum hat.
Mit Grenzwerten von Teil b) oder Vorzeichen von f' folgt, dass dort auch das globale Maximum ist . Mit Grenzwerten von Teil b) folgt, dass es kein globales Minimum gibt
.

2. Aufgabe 11 Punkte

Berechnen Sie, soweit möglich, folgende Integrale:

$$a)\ \int (x^2-2x)e^{-x}\,dx \qquad b)\ \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{4}{3}}}\,dx \qquad c)\ \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t+2)(\sin t+2t)^2\,dt.$$

Lösung:

a) [4 Punkte]

$$\begin{aligned}\int (x^2-2x)e^{-x}\,dx &= -e^{-x}(x^2-2x)+\int (2x-2)e^{-x}\,dx\\ &= -e^{-x}(x^2-2x)+(-e^{-x}(2x-2))+\int 2e^{-x}\,dx\\ &= -e^{-x}(x^2-2)-2e^{-x}+c, \quad c\in\mathbb{R}\\ &= -e^{-x}x^2+c, \quad c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

b) [3 Punkte]

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{4}{3}}}\,dx = \lim_{a\to 1}\int_0^a (1-x)^{-\frac{4}{3}}\,dx = \lim_{a\to 1}\left[3(1-x)^{-\frac{1}{3}}\right]_0^a = \lim_{a\to 1}\frac{3}{(1-a)^{\frac{1}{3}}}-3=\infty$$

Das Integral existiert also nicht.

c) [4 Punkte] Mit der Substitution $x(t):=\sin(t)+2x$ ergibt sich $dx/dt=\cos(t)+2$ und damit

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(t)+2)(\sin(t)+2)^2\,dt &= \int_{x(-\pi)}^{x(\pi)} x^2\,dx = \int_{-2\pi}^{2\pi} x^2\,dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2\pi}^{2\pi} = \frac{2^3\pi^3}{3}+\frac{2^3\pi^3}{3}=\frac{2^4}{3}\pi^3\ .\end{aligned}$$

3. Aufgabe 9 Punkte

a) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $8^{\ln(e^{2x})} = \sqrt[3]{2^8 \cdot 4^x}$.

b) Sei z die **komplexe** Zahl $z = \frac{1}{i+1}$. Geben Sie z in der Form $z = a + bi$ und $z = re^{i\varphi}$ an.

c) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $\sin^3(x) = -\cos^2(x)\sin(x)$.

Lösung:

(a) [3 Punkte]

$$\begin{aligned} & 8^{\ln(e^{2x})} = \sqrt[3]{2^8 \cdot 4^x} \\ \Leftrightarrow \quad & 8^{2x} = 2^{\frac{8}{3}} 4^{\frac{x}{3}} \\ \Leftrightarrow \quad & 2^{6x} = 2^{\frac{8+2x}{3}} \\ \Leftrightarrow \quad & 18x = 8 + 2x \\ \Leftrightarrow \quad & x = 1/2 \end{aligned}$$

(b) [3 Punkte] $z = \frac{1}{i+1} = -\frac{i-1}{2}$, also $a = 1/2, b = -1/2$.
Polarform: $r = 1/\sqrt{2}, \varphi = -\pi/4$.

(c) [3 Punkte]

$$\begin{aligned} & 0 = \sin^3(x) + \cos^2(x)\sin(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \sin(x)[\sin^2(x) + \cos^2(x)] = \sin(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(alternativ mit Fallunterscheidung)

Verständnisteil

4. Aufgabe 13 Punkte

a) Geben sie den Ansatz für die reelle sowie die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$p(x) = \frac{x^2+4}{(x-3)(x+1)^2(x^2+1)}$$

an. (Die Koeffizienten müssen also nicht berechnet werden)

b) Überprüfen Sie die folgende Funktion anhand der Definition auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2, & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

c) Es sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine divergente Folge mit $1 \leq b_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + a_n + b_n}{2n}.$$

Lösung:

a) [4 Punkte] Die Nullstellen des Nenners sind $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = i$ und $x_5 = -i$. Der komplexe Ansatz lautet damit

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x-i} + \frac{E}{x+i}.$$

Der relle Ansatz ist entsprechend

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

richtige Behandlung der Nullstelle $(x-3)$
richtige Behandlung der doppelten Nullstelle $(x+1)$
reelle/komplexe Version von (x^2+1)

b) [5 Punkte] Es gilt: $\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1} -(x-1)^2 = 0 = f(1)$, also ist f stetig.

Nach Definition gilt $f'(1) := \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Es ist

$$\lim_{x\nearrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\nearrow 1} \frac{-(x-1)^2 - 0}{x-1} = \lim_{x\nearrow 1} -(x-1) = 0$$

und

$$\lim_{x\searrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\searrow 1} \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

f ist also stetig, aber nicht differenzierbar im Punkt $x_0 = 1$.

c) [4 Punkte] Da a_n eine Nullfolge ist, ist auch $a_n \cdot \frac{1}{2n}$ eine Nullfolge.

Aus $1 \leq b_n \leq 5$ folgt: $\frac{1}{2n} \leq \frac{b_n}{2n} \leq \frac{5}{2n}$ $\forall\, n \geq 1$. (Also ist $\frac{b_n}{2n}$ auch Nullfolge. Begründung notwendig!)

Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + a_n + b_n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{2n} = \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2}.$$

5. Aufgabe 7 Punkte

a) Zeigen Sie:
$$1/10 \leq \ln(100) - \ln(90) \leq 1/9$$

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_2^4 f(x)\, dx = 6$. Zeigen Sie, dass es eine Stelle im Intervall $[2, 4]$ gibt, an der f den Wert $y = 3$ annimmt.

(Hinweis: Verwenden Sie geeignete Mittelwertsätze.)

Lösung:

a) [4 Punkte] Wir wenden den Mittelwertsatz auf $f(x) = \ln x$ an:

$$\begin{aligned} \frac{f(100) - f(90)}{100 - 90} &= f'(\xi),\ \xi \in [90, 100] \\ \Leftrightarrow \frac{\ln(100) - \ln(90)}{10} &= \frac{1}{\xi},\ \xi \in [90, 100] \\ \Leftrightarrow \ln(100) - \ln(90) &= \frac{10}{\xi},\ \xi \in [90, 100] \end{aligned}$$

Mit $\xi \in [90, 100] \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{10}{\xi} \leq \frac{1}{10}$ folgt die Behauptung.

b) [3 Punkte] Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert: Es existiert ein $\xi \in [2, 4]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{4-2} \int_2^4 f(x)\, dx$$

Schlussfolgerung $f(\xi) = \frac{6}{2} = 3$.

6. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gilt:

$$f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x.$$

c) Benutzen Sie Teilaufgabe b), um zu zeigen, dass für das Restglied des n-ten Taylorpolynoms mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für $-1 \leq x \leq 0$ die Abschätzung $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$ gilt.

Lösung:

a) [1 Punkt] $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x, \qquad f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x.$

b) [5 Punkte] Induktionsanfang ($n = 1$): $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

IV: $f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x$ für festes n, IB: $f^{(n+1)}(x) = (x+(n+1)) \cdot e^x$

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = ((x+n) \cdot e^x)' \\ &= e^x + (x+n)e^x = (x+(n+1))e^x \end{aligned}$$

c) [4 Punkte] Das Restglied des n-ten Taylorpolynoms hat die Darstellung $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{(n+1)}$.
Wegen b) gilt auf dem Intervall $[-1, 0]$

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{(n+1)}\right| &= \left|\frac{(\xi+(n+1)) \cdot e^{\xi}}{(n+1)!}x^{(n+1)}\right|, \\ &\leq \left|\frac{(\xi+(n+1)) \cdot e^{\xi}}{(n+1)!}\right| \leq \left|\frac{(\xi+(n+1))}{(n+1)!}\right| \leq \frac{(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Abschätzung x: und Abschätzung $\xi \in [x, 0]$