Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: Bärwolff, Mehl, Penn-Karras
Ass.: Altmann, Meiner, Wassmuss

WS 12/13
02. Apr 2013

April – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

10 Punkte

Die Funktion $f :]3,7] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \frac{e^x}{x-3}$.

a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f.

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf globale Extrema. Bestimmen Sie ggf. die Extremstellen.

c) Stellen Sie zu f das Taylorpolynom 2. Ordnung mit Entwicklungsstelle $x_0 = 4$ auf.

Lösung:

a) Monotonieverhalten:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-3) - e^x}{(x-3)^2} = \frac{e^x(x-4)}{(x-3)^2}$$

Da $e^x, (x-3)^3 > 0$ im Def.bereich: $f'(x) > 0$ für $x > 4$ und $f'(x) < 0$ für $x < 4$. Also fällt f auf $]3,4[$ und steigt auf $]4,7]$.

b) Wg. a) gibt es ein (globales) Minimum und $x = 4$ ist globale Minimalstelle . Um ggf. eine Maximalstelle zu finden, untersuchen wir den Rand: $f(7) = \frac{e^7}{4}$ und

$$\lim_{x\to 3, x>3} f(x) = \lim_{x\to 3, x>3} \frac{e^x}{x-3} = \infty$$

Denn $x = 3$ ist Nullstelle des Nenners und der Zähler ist $e^3 \in \mathbb{R}$ also endlich. (Untersucht man zuerst den linken Rand, braucht der rechte nicht mehr betrachtet zu werden.) Ein Maximum existiert also nicht.

c) Taylorpolynom aufstellen mit Entwicklungsstelle $x_0 = 4$. Dazu benötigen wir die 2. Ableitung in $x = 4$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^x \frac{x-4}{(x-3)^2}\right)' = e^x \frac{x-4}{(x-3)^2} + e^x \left(\frac{x-4}{(x-3)^2}\right)' \\ &= e^x \underbrace{\frac{x-4}{(x-3)^2}}_{=0 \text{ für } x=4} + e^x \underbrace{\frac{(x-3)^2 - (x-4)\cdot 2\cdot (x-3)}{(x-3)^4}}_{=\frac{1-0}{1}=1 \text{ für } x=4} \end{aligned}$$

mit $f''(4) = e^4$.

Alternativ zuerst mit Quotientenregel

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{e^x(x-4)}{(x-3)^2}\right)' = \frac{(e^x(x-4))'(x-3)^2 - e^x(x-4)\left((x-3)^2\right)'}{((x-3)^2)^2} \\ &= \frac{\left(e^x(x-4) + e^x\right)(x-3)^2 - e^x(x-4)2(x-3)}{(x-3)^4} \\ f''(4) &= \frac{\left(e^4\cdot 0 + e^4\right)1^2 - e^4\cdot 0\cdot 2\cdot 1}{1^4} = e^4 \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 = e^4 + 0 + \frac{1}{2}e^4(x-4)^2 \\ &= e^4\left(1 + \frac{1}{2}(x-4)^2\right) \end{aligned}$$

2. Aufgabe

11 Punkte

a) Bestimmen Sie alle **komplexen** Lösungen der Gleichung $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$. Die Lösungen dürfen in Polarkoordinaten angegeben werden.

b) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $|x - 2| = 3x$.

c) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen $x \in [0, 2\pi]$ der Gleichung: $\sin(2x) = \cos(x)$.

Lösung:

a) [4 Punkte] $1+i\sqrt{3}$ mit Polarkoordinaten darstellen: Betrag $r = \sqrt{1+3} = 2$ und Winkel $\phi = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Ansatz $z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{1}{3}(\pi/3+2k\pi)}$ ergibt

$$z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/9} \qquad z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{1}{3}(\pi/3+2\pi)} = \sqrt[3]{2}e^{i7\pi/9} \qquad z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{1}{3}(\pi/3+4\pi)} = \sqrt[3]{2}e^{i13\pi/9}$$

b) [3 Punkte] 1. Fall $x > 2$: $|x - 2| = x - 2$

$$x - 2 = 3x \qquad -2 = 2x \qquad -1 = x$$

Wg. $x = -1 < 2$ ist die Lösungsmenge für diesen Fall leer: $\mathbb{L}_1 = \emptyset$
2. Fall $x \leq 2$: $|x - 2| = 2 - x$

$$2 - x = 3x \qquad 2 = 4x \qquad \frac{1}{2} = x$$

Also $\mathbb{L}_2 = \{\frac{1}{2}\} = \mathbb{L}$

c) [4 Punkte] Additionstheorem anwenden: $2\sin x \cos x = \cos x$. Gleichung wird gelöst durch $\cos x = 0$, also $x = \frac{\pi}{2}$ oder $x = \frac{3\pi}{2}$. Bleibt $2\sin x = 1$, also $x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ oder $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
Insgesamt $\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

3. Aufgabe 9 Punkte

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 4-periodische, gerade Funktion. Auf $[0,2]$ ist f gegeben durch $f(t) = 2 - t$. Skizzieren Sie die Funktion f auf $[-2, 2]$ und bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f.

Lösung:

Skizze: $f(t) = 2 - t$ auf $[0,2]$, korrekte Fortsetzung auf $[-2,0]$.
Da f gerade ist, sind alle Sinus-Koeffizienten $b_k = 0$.
Es ist $T = 4$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\,dt = \frac{1}{2}2\int_0^2 f(t)\,dt \\
&= \int_0^2 2 - t\,dt \\
&= \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^2 \\
&= \left(4 - \frac{1}{2}4\right) = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(k\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\cos(k\omega t)\,dt \\
&= \int_0^2 f(t)\,\cos(k\omega t)\,dt \\
&= \int_0^2 \underbrace{(2-t)}_{\downarrow}\,\underbrace{\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}_{\uparrow}\,dt \\
&= \left((2-t)\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 (-1)\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)\,dt\right) \\
&= \left(\underbrace{(2-2)}_{=0}\frac{2}{k\pi}\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - 2\frac{2}{k\pi}\underbrace{\sin(0)}_{=0} + \int_0^2 \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)\,dt \\
&= \frac{2}{k\pi}\frac{2}{k\pi}\left(-\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)\right)\Big|_0^2 \\
&= \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2(-\cos(k\pi) + \cos(0)) \\
&= \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\left(1 - (-1)^k\right)
\end{aligned}
$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

8 Punkte

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

b) Geben Sie Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, für die gilt:

i) $\lim_{n\to\infty} (n - a_n) = \infty$,

ii) $\lim_{n\to\infty} (n - b_n) = 3$.

Lösung: a) [5 Punkte] Induktionsanfang für $n = 1$.

$$\text{L.S.} \quad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{R.S.} \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Induktionsschritt. Induktionsvoraussetzung (I.V.): Die Aussage gilt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsbehauptung (I.Beh.): Die Aussage gilt auch für das auf n folgende $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{L.S der I.Beh.} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2} = \text{R.S. der I.Beh}
\end{aligned}$$

b) [3 Punkte] $a_n = \frac{n}{2}$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} = \infty$.
$b_n = n - 3$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} (n - (n-3)) = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$.

5. Aufgabe 12 Punkte

a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx$ und berechnen Sie, wenn möglich, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.

b) Gegeben sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = 1\,, \qquad f'(x) = -g(x)\,, \qquad g(2x) = 2f(x)g(x).$$

Zeigen Sie mit dem Konstanzkriterium, dass gilt: $2f^2(x) - f(2x) = 1$.

Lösung:

a) [4+3=7 Punkte] Substitution $t = e^x$ mit $dt = e^x dx$ ergibt

$$\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(t) + c = \arctan(e^x) + c$$

Damit

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx &= \lim_{z\to\infty}\int_0^z \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = \lim_{z\to\infty} \arctan(e^x)\Big|_0^z \\ &= \underbrace{\lim_{z\to\infty}\arctan(e^z)}_{=\lim_{z\to\infty}\arctan(z)=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan(e^0)}_{=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

b) [5 Punkte] Ableiten, Ansatz fürs Konstanzkriterium

$$\begin{aligned}\left(2f^2(x) - f(2x)\right)' &= 2\cdot\underbrace{2f(x)f'(x)} - \underbrace{2f'(2x)} \\ &\overset{f'=-g}{=} -4f(x)g(x) + 2g(2x) \\ &\overset{g(2x)=\ldots}{=} -4f(x)g(x) + 2\cdot 2f(x)g(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Einen Wert $(x = 0)$ einsetzen: $2f^2(0) - f(0) = 2\cdot 1^2 - 1 = 1$

6. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit den Parametern $a,b\in\mathbb{R}$ als

$$f(x)=\begin{cases}\sin(ax) & ,x>0\\ (x-1)^2+b & ,x\leq 0.\end{cases}$$

a) Für welche Parameter $a,b\in\mathbb{R}$ ist f stetig in $x=0$?

b) Für welche Parameter $a,b\in\mathbb{R}$ ist f differenzierbar in $x=0$? Benutzen Sie die Definition der Differenzierbarkeit.

c) Für welche Parameter $a\in\mathbb{R}$ existiert $\lim_{x\to\infty}f(x)$?

Lösung:

a) [2 Punkte] Stetigkeit: $\lim\limits_{x\to 0,x>0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0,x>0}\sin(ax)=0$ und $f(0)=1+b$ ergibt Stetigkeit für $b=-1$ und alle $a\in\mathbb{R}$.

b) [5 Punkte] Differenzierbarkeit: $b=-1$ wird übernommen, da Stetigkeit Voraussetzung für Differenzierbarkeit ist. Ansatz mit einseitigen Differenzenquotienten , $f(0)=(-1)^2-1=0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0,x>0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0,x>0}\frac{\sin(ax)-0}{x}=\lim_{x\to 0,x>0}\frac{\sin(ax)}{x}\\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0,x>0}\frac{a\cos(ax)}{1}=a\cos(0)=a\\
\lim_{x\to 0,x<0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0,x<0}\frac{(x-1)^2-1-0}{x}=\lim_{x\to 0,x<0}\frac{x^2-2x}{x}\\
&= \lim_{x\to 0,x<0} x-2=-2
\end{aligned}$$

Also $a=-2$.

c) [3 Punkte] Für $a=0$ ist $f(x)=0$ für $x>0$, also existiert auch der Grenzwert $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. Für $a\neq 0$ existiert der Grenzwert nicht.
Begründung: Für die Folge $x_k=\frac{k\frac{\pi}{2}}{a}$ mit $\lim_{k\to\infty}x_k=\infty$ ist $\sin(ax_k)=\sin(k\frac{\pi}{2})=(1,-1,1,-1,\dots)=(-1)^{k+1}$ eine alternierende Folge und nicht konvergent.