Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 14
Doz.: Blath, Gündel–vom Hofe 08. Okt 2014
Ass.: Altmann, Fackeldey, Hammer

Oktober – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe 10 Punkte

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch: $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2},\ x \in D$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c) Untersuchen Sie die Funktion f auf globale Maxima und Minima.

Lösung:

a) [2 Punkte] Max. Definitionsbereich: $4 - x^2$ darf nicht negativ werden, also:

$$4 - x^2 \geq 0 \text{ und somit } |x| \leq 2$$

was dann $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$ ergibt.

b) [2 Punkte] Nullstellen gdw. $f(x) = 0$, also

$$\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} = 0 \iff x^2(4-x^2) = 0, \quad x \in D$$

ergibt dann $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$.

c) [6 Punkte] Bestimme zunächst Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \quad , \quad f''(x) = \frac{x(x^2-6)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \quad , \qquad |x| < 2$$

dann $f'(x) = 0 \iff 2 - x^2 = 0$ ergibt $x_{N1} = \sqrt{2}$ und $x_{N2} = -\sqrt{2}$.

Einsetzen in f'' ergibt, dass in x_{N1} ein Max vorliegt, da $f''(\sqrt{2}) = -2 < 0$

..... und dass in x_{N2} ein Min vorliegt, da $f''(-\sqrt{2}) = 2 > 0$. .

Überprüfen der Ränder: Da $f(2) = f(-2) = 0$ und $f'(x) \neq 0$ auf $D \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, sind die Extrema auch globale Extrema.

2. Aufgabe 10 Punkte

a) Finden Sie alle **reellen** Lösungen der Gleichung $\cos^4(x) = -\cos^2(x)\sin^2(x)$.

b) Geben Sie alle **komplexen** Lösungen der Gleichung $z^3 = 27e^{3i\pi}$ in der Form $z = a + bi$ an.

c) Für welche **komplexen** Zahlen $z = a + bi$ gilt sowohl $\mathrm{Re}(z) = |z|$ als auch $|z + 1| > 3$?

Lösung:

a) [3 Punkte] Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$\cos^2(x)[\cos^2(x) + \sin^2(x)] = 0$$

Unter Ausnutzung der Gleichung $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ ergibt sich also $\cos^2(x) = 0$ und somit $\cos(x) = 0$. Damit ergibt sich als Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. (Alternativ auch Fallunterscheidung und durch $\cos(x)$ teilen.)

b) [3 Punkte] Da die rechte Seite schon in der Eulerschen Darstellung gegeben ist, erhalten wir direkt

$$|z| = \sqrt[3]{27} = 3, \qquad \arg(z) = \frac{3\pi + k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Somit ergeben sich die drei Lösungen

$$\begin{aligned}
z_1 &= 3e^{i\pi} = -3, \\
z_2 &= 3e^{5i\pi/3} = 3\cos(5\pi/3) + 3i\sin(5\pi/3)\ (300\text{Grad}), \\
z_3 &= 3e^{7i\pi/3} = 3\cos(7\pi/3) + 3i\sin(7\pi/3)\ (60\text{Grad}).
\end{aligned}$$

c) [4 Punkte] Die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ sollen zwei Bedingungen erfüllen. Mit $z = a + bi$ ergibt die erste Gleichung $a = \sqrt{a^2 + b^2}$. Demnach muss $a \geq 0$ gelten und quadrieren ergibt weiter

$$a^2 = a^2 + b^2 \iff 0 = b^2.$$

Also ist $b = 0$ und somit $z = a \in \mathbb{R}$. Die Ungleichung muss also nur noch für reelle Zahlen untersucht werden. Da wir schon wissen, dass $a \geq 0$ gelten muss, brauchen wir keine Fallunterscheidung und erhalten direkt

$$|z + 1| = |a + 1| = a + 1 > 3 \iff a > 2.$$

Somit ergibt sich die Lösungsmenge $L = \{z = a + bi \in \mathbb{C} \mid b = 0, a > 2\}$.

3. Aufgabe 10 Punkte

Berechnen Sie folgende bestimmte bzw. unbestimmte Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int (x^3+x)^5(3x^2+1)\,\mathrm{d}x$.

Lösung:

a) [3 Punkte] Substitution $u = x^3+1,\ \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x$ dann ist

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}(2^{3/2}-0^{3/2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

b) [4 Punkte]

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= e^x\sin(x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= e^x\sin(x)\Big|_0^{\pi/2} - \left(-e^x\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos(x)e^x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= e^x\sin(x)\Big|_0^{\pi/2} + e^x\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Also kann man nach dem Integral umstellen

$$\int_0^{\pi/2} e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^x\sin(x)+e^x\cos(x)}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}[(e^{\pi/2}+0)-(0+e^0)] = \frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1).$$

c) [3 Punkte] Substitution $u = x^3+x,\ \mathrm{d}u = (3x^2+1)\,\mathrm{d}x$

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)dx = \int u^5\,\mathrm{d}u = \frac{u^6}{6}+C = \frac{(x^3+x)^6}{6}+C.$$

<u>**Verständnisteil**</u>

4. Aufgabe 10 Punkte

a) Zeigen Sie **direkt anhand der Grenzwertdefinition**, dass die Folge (a_n) mit $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert.

b) Zeigen Sie **durch vollständige Induktion**, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \quad \text{gilt.}$$

c) Folgern Sie aus b), dass die Folge (b_n) definiert durch $b_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung:

a) [3 Punkte] Sei $\varepsilon > 0$. Wählt man $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, so gilt für alle $n \geq n_0$, dass

$$|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Die Folge konvergiert also gegen 0.

[Die Alternative mit Sandwichkriterium (Nachweis ohne Grenzwertdef.) gibt max. 1 Punkt: Die Folge konvergiert nach dem Sandwichkriterium gegen 0, da $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$.]

b) [4 Punkte]

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt nach Def. $\sum_{k=1}^{1} x^k = x = \frac{x-x^2}{1-x}$.
- Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$.
- Induktionsschritt: Es gilt

  $$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1} \underset{\text{(IV)}}{=} \frac{x - x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{x - x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{x - x^{n+2}}{1-x}.$$

  (Es sollte ersichtlich sein, an welcher Stelle die Induktionsvoraussetzung benutzt wird.)

c) [3 Punkte] Für $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus b), dass

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Wegen $0 < \frac{1}{2} < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, also folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

5. Aufgabe 11 Punkte

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x > 0 \\ ax + b & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie, für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Untersuchen Sie, für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

c) Können die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existiert?

Lösung:

a) [4 Punkte] Die Funktion ist stetig in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da dort Komposition aus stetigen Funktionen. Stetigkeit in $x = 0$: Wegen $|x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$ gilt

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

sowie

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} (ax + b) = b = f(0).$$

Folglich ist f stetig in 0 genau dann, wenn $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $b = 0$ ist.

b) [5 Punkte] Die Funktion ist differenzierbar in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da dort Komposition aus differenzierbaren Funktionen.

Diff'barkeit in $x = 0$: Hierfür muss f insbesondere stetig in 0, also nach a) $b = 0$ sein. Wegen $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$ gilt dann

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x\searrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

sowie

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{ax - 0}{x} = a.$$

Folglich ist f differenzierbar in 0 genau dann, wenn $a = b = 0$ ist, und dann ist $f'(0) = 0$.

c) [2 Punkte] Für $x > 0$ ist mit Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2(-\frac{1}{x^2}) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dieser Ausdruck divergiert für $x \searrow 0$, folglich gibt es keine Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$, so dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existiert.

6. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x}{2}\sin(x)$.

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$.

b) Finden Sie Folgen (a_n) and (b_n), die $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \infty$ erfüllen.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = \pi$ im Intervall $[\pi/2, 5\pi/2]$ mindestens eine Lösung hat.

Lösung:

a) [2 Punkte] Die Funktion $\sin(x)/2$ ist beschränkt und somit gilt

$$0 = \lim_{x\to 0} -x \le \lim_{x\to 0} f(x) \le \lim_{x\to 0} x = 0$$

Nach dem Sandwich-Prinzip gilt also $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

b) [4 Punkte] Wir betrachten die Folgen $a_n = n\pi$ (alternativ $a_n \equiv 0$) und $b_n = \pi/2 + 2n\pi$. Für diese beiden Folgen gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{2} 0 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi/2 + 2n\pi}{2} 1 = \frac{\pi}{4} + \lim_{n\to\infty} n\pi = \infty.$$

c) [3 Punkte] Wir definieren die Funktion $g(x) := f(x) - \pi$ und zeigen mit dem Zwischenwertsatz, dass g eine Nullstelle im Intervall $[\pi/2, 5\pi/2]$ besitzt. Offensichtlich ist g stetig und es gilt

$$g(\pi/2) = \frac{\pi}{4} - \pi < 0, \qquad g(5\pi/2) = \frac{5\pi}{4} - \pi > 0$$

Somit werden nach dem ZWS auch alle Zwischenwerte, inbesondere die 0, angenommen. Die Funktion g besitzt also eine Nullstelle im Intervall $[\pi/2, 5\pi/2]$.

[beim Arbeiten mit der falschen Funktion gibt es max. 1 Punkt]