Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: Fackeldey, Guillemard, Penn-Karras
Ass.: Beßlich, Winkert

WiSe 14/15
20. Februar 2015

Modulprüfung
„Analysis I für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(12 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

(a) Bestimmen Sie die Stellen aller lokalen und globalen Minima und Maxima der Funktion h.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion h auf dem Intervall $[1, 2]$ eine reelle Nullstelle besitzt.

Lösung:

(a) [9 Punkte]
Wir bemerken, dass

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty.$$

Also besitzt h kein globales Minimum. Die ersten beiden Ableitungen von h sind

$$h'(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2, \qquad h''(x) = -3x^2 - 4x + 1.$$

Eine Nullstelle von h' ist $x_1 = 1$ (oder $x_2 = -1$ oder $x_3 = -2$). Die jeweiligen Polynomdivisionen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}(-x^3 + 2x^2 + x - 2) : (x - 1) &= -x^2 - 3x - 2,\\ (-x^3 + 2x^2 + x - 2) : (x + 1) &= -x^2 - x + 2,\\ (-x^3 + 2x^2 + x - 2) : (x + 2) &= -x^2 + 1.\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man die drei Nullstellen

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -2.$$

Somit bekommen wir

$$h''(1) = -6 < 0, \quad h''(-1) = 2 > 0, \quad h''(-2) = -3 < 0.$$

Die zweite Ungleichung zeigt, dass h im Punkt $x_2 = -1$ ein lokales Minimum hat. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}h(1) &= -\frac{1}{4}\cdot(1)^4 - \frac{2}{3}\cdot(1)^3 + \frac{1}{2}\cdot(1)^2 + 2\cdot 1 = -\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{19}{12} > 0,\\ h(-2) &= -\frac{1}{4}(-2)^4 - \frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 2\cdot(-2) = -4 + \frac{16}{3} + 2 - 4 = -\frac{2}{3} < 0.\end{aligned}$$

Somit hat h in $x_1 = 1$ ein globales Maximum und in $x_3 = -2$ ein lokales Maximum.

(b) [3 Punkte]
Es ist

$$\begin{aligned}h(1) &= \frac{19}{12} > 0,\\ h(2) &= -\frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{2}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 = -4 - \frac{16}{3} + 2 + 4 = -\frac{10}{3} < 0.\end{aligned}$$

Da h eine stetige Funktion ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz von $\xi \in]1, 2[$ mit $h(\xi) = 0$.

2. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{8}{x^2-16}dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx$, (c) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx$.

Hinweis: Verwenden Sie bei (b) die Substitution $t := \sqrt{1+x}$. Bei Teil (c) muss partielle Integration verwendet werden.

Lösung:

(a) [4 Punkte]
Wir bestimmen das Integral mit Hilfe der Partialbruchzerlegung. Der Ansatz lautet

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4}.$$

Die Zuhaltemethode liefert $A = \frac{1}{8}$ und $B = -\frac{1}{8}$. Somit ist

$$\int \frac{8}{x^2-16}dx = \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4}\right)dx = \ln|x-4| - \ln|x+4| + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

(b) [3 Punkte]
Wir substituieren $t := \sqrt{1+x}$. Dann gilt $dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx$ und $2+x = t^2+1$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx &= \int \frac{2t}{(t^2+1)t}dt = \int \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= 2\arctan(t) + c = 2\arctan\left(\sqrt{1+x}\right) + c\end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

(c) [3 Punkte]
Wir verwenden partielle Integration auf $f(x) = x$ und $g'(x) = \sin(x)$. Dann ist $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos(x)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x)dx &= [x(-\cos(x))]_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos(x))dx = -[x\cos(x)]_0^\pi + [\sin(x)]_0^\pi \\ &= -[\pi\cos(\pi) - 0\cdot\cos(0)] + \sin(\pi) - \sin(0) = \pi.\end{aligned}$$

3. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

(a) Gegeben ist die komplexe Zahl $z_1 = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$ in Polarkoordinaten. Geben Sie die Darstellung von z_1 in kartesischen Koordinaten an.

(b) Gegeben ist die komplexe Zahl $z_2 = 1 - i$ in kartesischen Koordinaten. Geben Sie die Darstellung von z_2 in Polarkoordinaten an.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$. Geben Sie diese in Polarkoordinaten an.

Lösung:

(a) [2 Punkte]
Es gilt

$$z_1 = 3e^{\frac{\pi}{2}i} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Somit erhalten wir $x = r\cos(\varphi) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cdot 0 = 0$ und $y = r\sin(\varphi) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Also ist

$$z_1 = 3i.$$

(b) [2 Punkte]

Es ist $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ und $\arctan\left(\frac{|-1|}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$. Da z_2 im 4. Quadranten liegt, erhalten wir $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Die Darstellung von z_2 in Polarkoordinaten lautet also

$$z_2 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

(c) [5 Punkte]

Wir schreiben $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ zuerst in Polarkoordinaten. Es gilt $\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ und $\arctan\left(\frac{|\sqrt{2}|}{|\sqrt{2}|}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Also ist $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ und somit

$$-\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2e^{\frac{3}{4}\pi i} = 2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right).$$

Sei nun $z = re^{i\varphi}$ und beachte, dass $1 = e^{2\pi k i}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann folgt

$$z^4 = r^4 e^{4i\varphi} = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}e^{2k\pi i}.$$

Wir lesen $r = \sqrt[4]{2}$ und $\varphi = \frac{3}{16}\pi + \frac{k}{2}\pi$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ab. Die vier verschiedenen Lösungen sind dann

$$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{3}{16}\pi i}, \qquad z_2 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{11}{16}\pi i}, \qquad z_3 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{19}{16}\pi i}, \qquad z_4 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{27}{16}\pi i}.$$

4. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \arctan x$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zeigen Sie für das Restglied die Abschätzung $|R_2(x)| \leq \dfrac{4}{3}$ für $x \in [-1, 1]$. *Hinweis:* Die Ableitung des Arcustangens ist $\dfrac{1}{1+x^2}$. Zur Kontrolle: $g'''(x) = -\dfrac{8x}{(1+x^2)^3}$.

Lösung: [10 Punkte]

Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= x\arctan(x), & g(0) &= 0,\\ g'(x) &= \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}, & g'(0) &= 0,\\ g''(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}, & g''(0) &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$T_2(x) = x^2.$$

Für das Restglied von T_2 benötigen wir noch die 3. Ableitung von g

$$g'''(x) = -\frac{8x}{(1+x^2)^3}$$

und erhalten auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \left|\frac{-8\xi}{(1+\xi^2)^3\, 3!}\, x^3\right| = \left|\frac{8\xi}{(1+\xi^2)^3\, 3!}\right| \underbrace{|x^3|}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{\max_{\xi\in[-1,1]} |8\xi|}{3! \min_{\xi\in[-1,1]}(1+\xi^2)^3} \leq \frac{8}{3!} \cdot 1 = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

wobei ξ zwischen x und 0 liegt.

5. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Finden Sie heraus, für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{bx} & \text{falls } x \leq 0, \\ a\dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

stetig bzw. differenzierbar ist. *Hinweis:* Die Differenzierbarkeit soll mit Hilfe des Differenzenquotienten überprüft werden.

Lösung: [10 Punkte]

Wir untersuchen zuerst die Stetigkeit. Für $x_0 \neq 0$ ist f als Komposition stetiger Funktionen für alle $a, b \in \mathbb{R}$ stetig. Im Punkt $x_0 = 0$ gilt

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{bx} = 1$$

und

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} a\frac{\ln(x+1)}{x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{a}{x+1}}{1} = a.$$

Also ist f im Punkt $x_0 = 0$ stetig falls $a = 1$ ($b \in \mathbb{R}$ beliebig) gilt. Für $a \neq 1$ ist die Funktion in $x_0 = 0$ nicht stetig.

Betrachten wir nun die Differenzierbarkeit: Für $x_0 \neq 0$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen für alle $a, b \in \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung ist

$$f'(x) = \begin{cases} be^{bx} & \text{falls } x < 0, \\ a\dfrac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Aus dem ersten Teil wissen wir bereits, dass f in $x_0 = 0$ für $a \neq 1$ nicht stetig ist, somit kann die Funktion dort auch nicht differenzierbar sein. Betrachten wir also den Fall $x_0 = 0, a = 1, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{bx} - e^{b \cdot 0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{bx} - 1}{x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{be^{bx}}{1} = b$$

und

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{a=1}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - e^{b \cdot 0}}{x - 0} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}}{1}$$
$$\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{2(x+1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Also ist die Funktion f in $x_0 = 0$ für $a = 1$ und $b = -\frac{1}{2}$ differenzierbar.

6. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge

$$x_0 := 0, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + \pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Berechnen Sie das Folgenglied x_2.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $x_n < 2\pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) streng monoton wachsend ist.

(d) Ist die Folge konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung:

(a) [1 Punkt] Es ist $x_0 = 0, x_1 = \pi$ und $x_2 = \frac{3}{2}\pi$.

(b) [4 Punkte]

- Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt nach Definition $x_0 = 0 < 2\pi$ und für $n = 1$ gilt $x_1 = \pi < 2\pi$.
- Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $x_n < 2\pi$.
- Induktionsschritt: Es gilt

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \pi \underset{\text{(I.V.)}}{<} \frac{1}{2} \cdot 2\pi + \pi = \pi + \pi = 2\pi.$$

(c) [2 Punkte]
Zu zeigen ist $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Folge ist dies äquivalent zu

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \pi > x_n \quad \Longleftrightarrow \quad \pi > \frac{1}{2}x_n \quad \Longleftrightarrow \quad x_n < 2\pi.$$

Da die letzte Ungleichung in (b) bereits gezeigt wurde, ist damit die strenge Monotonie nachgewiesen.

(d) [2 Punkte]
Nach (b) und (c) ist die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergiert sie nach dem Monotoniekriterium. Für den Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ gilt nach Definition der Folge und wegen der Grenzwertrechenregeln

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}x_n + \pi\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \pi = \frac{1}{2}x + \pi.$$

Auflösen nach x ergibt $x = 2\pi$.