April

1. Aufgabe **(12 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f von f.

(b) Untersuchen Sie f auf lokale Maxima und lokale Minima.

(c) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ sowie an möglichen Definitionslücken.

(d) Überprüfen Sie, ob die Funktion f globale Extrema hat.

(e) Zeigen Sie, dass $f(-2) < 0$ und $f(0) > 0$ ist. Kann man daraus mit dem Zwischenwertsatz folgern, dass f eine Nullstelle im Intervall $[-2, 0]$ hat?

2. Aufgabe **(11 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x^4 + x^2}$.

(a) Bestimmen Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die reelle Partialbruchzerlegung von f.

(c) Geben Sie mit Hilfe der reellen Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von f an.

3. Aufgabe **(9 Punkte)**

(a) Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{|6 - 2x|}{x} < 1$$

für $x \in \mathbb{R}$ an.

(b) Geben Sie die Lösung der komplexen Gleichung

$$z(2 + i) = 3 + 4i$$

in der Gestalt $z = x + yi \in \mathbb{C}$ an.

4. Aufgabe **(12 Punkte)**

(a) Zeigen Sie für $q \neq 1$ mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx.$$

(c) Geben Sie eine Folge an, die beschränkt, aber nicht konvergent ist. Geben Sie eine Folge an, die monoton, aber nicht konvergent ist.

Scanned by CamScanner

5. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Gegeben sei die ungerade 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(t) = t \quad \text{für} \quad -1 < t < 1, \quad f(-1) = 0$$

definiert ist (d.h. $T = 2$). Bestimmen Sie das reelle Fourierpolynom n-ter Ordnung von f.

Hinweis: Für eine ungerade T-periodische Funktion gilt für die Fourierkoeffizienten

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega kt)dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(\omega kt)dt.$$

6. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Begründen Sie zunächst, dass $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung f'. Begründen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(c) Ist f' auf ganz $\mathbb{R}$ stetig? Ist f' auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar?

Hinweis: Es darf verwendet werden, dass $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.

Gesamtpunktzahl: 60 Punkte

Scanned by CamScanner