1. Aufgabe **(12 Punkte)**

(a) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n+3n^2}.$$

(b) Leiten Sie die folgenden Funktionen ab. Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

$$f(x) := \ln(x\,e^a), \qquad g(x) := (x^2+2x+4)\,\sin(x)$$

(c) Berechnen Sie $z_1 z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ für $z_1 := 1+3i$ und $z_2 := 1+i$. Geben Sie das Ergebnis jeweils in der Form $a+bi$ an.

(d) Geben Sie sowohl den Ansatz der reellen als auch den Ansatz der komplexen Partialbruchzerlegung für die Funktion

$$h(x) := \frac{3x}{(x+1)(x-4)^2(x^2+4)}$$

an. Die Koeffizienten müssen dabei **nicht** bestimmt werden.

Lösung:

(a) [3P] Zunächst kürzen wir die höchste auftretende Potenz von n:

$$a_n = \frac{n^2+2}{n+3n^2} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}+3}.$$

Da die einzelnen Summanden alle konvergieren, können wir die Rechenregeln für konvergente Folgen (Grenzwertsätze) anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{1+0}{0+3} = \frac{1}{3}.$$

(b) [2P] Es gilt

$$f'(x) \overset{\text{(KR)}}{=} \frac{1}{x\,e^a}(x\,e^a)' = \frac{1}{x\,e^a}e^a = \frac{1}{x} \qquad \text{bzw.} \qquad f'(x) = \big(\ln(x)+a\big)' = \frac{1}{x},$$

$$g'(x) \overset{\text{(PR)}}{=} (x^2+2x+4)'\sin(x) + (x^2+2x+4)\,(\sin(x))'$$

$$= (2x+2)\,\sin(x) + (x^2+2x+4)\,\cos(x).$$

(c) [3P] Für die komplexen Zahlen $z_1 = 1+3i$ und $z_2 = 1+i$ gilt

$$z_1 z_2 = (1+3i)(1+i) = 1+3i+i+3i^2 = 1+4i-3 = -2+4i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+3i-i-3i^2}{1^2+1^2} = \frac{1+3+2i}{2} = 2+i.$$

(d) [4P] Es gilt Grad(Zähler) $= 1 < 5 =$ Grad(Nenner). Die reellen Nullstellen der Funktion h sind -1 und 4. Dabei ist 4 eine doppelte Nullstelle. Zudem hat h noch die komplexen Nullstellen $2i$ und $-2i$. Deswegen ist der Ansatz der reellen Partialbruchzerlegung

$$h(x) = \underbrace{\frac{A}{x+1}} + \underbrace{\frac{B_1}{x-4} + \frac{B_2}{(x-4)^2}} + \underbrace{\frac{Cx+D}{x^2+4}}$$

und für die komplexe Partialbruchzerlegung

$$h(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-4} + \frac{B_2}{(x-4)^2} + \underbrace{\frac{E}{x-2i} + \frac{F}{x+2i}}.$$

2. Aufgabe **(8 Punkte)**

Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1+\cos(\pi x)}{x-1} & x \neq 1, \\ 0 & x = 1 \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, ob die Funktion an der Stelle $x = 1$ auch differenzierbar ist und geben Sie in diesem Fall die Ableitung $f'(1)$ an.

Lösung:

(a) [4P] Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist die Funktion f stetig , da

- die Funktion $\mathbb{R} \setminus \{1\} \ni x \mapsto 1 + \cos(\pi x)$ stetig ist (Verknüpfung stetiger Funktionen),
- die Funktion $\mathbb{R} \setminus \{1\} \ni x \mapsto x - 1$ stetig ist (Polynom) und somit
- die Funktion $\mathbb{R} \setminus \{1\} \ni x \mapsto \frac{1+\cos(\pi x)}{x-1}$ stetig ist (Quotient stetiger Funkionen, wobei der Nenner $\neq 0$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).

Wir berechnen $\lim_{x\to 1} f(x)$. Wir bemerken zunächst, dass

$$\lim_{x\to 1} \big(1 + \cos(\pi x)\big) = 1 + \cos(\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1} (x - 1) = 0.$$

Deswegen wenden wir die Regel von Bernoulli–L'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\big(1 + \cos(\pi x)\big)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{1} = -\pi \sin(\pi) = 0.$$

Die Funktion erfüllt also

$$f(1) = 0 = \lim_{x\to 1} f(x)$$

und ist somit auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(b) [4P] Wir müssen untersuchen, ob der Grenzwert des Differenzenquotienten, also

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

existiert. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1+\cos(\pi x)}{x-1} - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x-1)^2} \\ &\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2(x-1)} \\ &\overset{\text{(L'H)}^1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2 \cos(\pi x)}{2} = -\frac{\pi^2}{2} \cos(\pi) = \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Also ist die Funktion f ist an der Stelle $x = 1$ differenzierbar und es gilt $f'(1) = \pi^2/2$.

[1] Weil $\lim_{x\to 1} \big(-\pi \sin(\pi x)\big) = 0 = \lim_{x\to 1} \big(2(x-1)\big)$ gilt.

3. Aufgabe **(10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle **komplexen** Lösungen der Gleichung $z^4 = -25$.

(b) Finden Sie alle **reellen** Lösungen der Ungleichung $|x - \pi| \leq 2x$.

(c) Finden Sie alle **reellen** Lösungen der Gleichung $1 + 2\ln(x^{1/3}) = \ln(\sqrt[3]{x^5})$.

Lösung:

(a) [4P] Sei $z := re^{i\phi}$. Mit $-1 = e^{i\pi}$ erhalten wir

$$z^4 = -25 \Leftrightarrow z^4 = 25e^{i\pi} \Leftrightarrow r^4 e^{4i\phi} = 25e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{25} = \sqrt{5} \\ 4\phi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat die Gleichung genau 4 Lösungen. Daher betrachten wir $k = 0, 1, 2, 3$. Die 4 Lösungen sind also gegeben durch

$$z_k = \sqrt{5}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

also genauer

$$L = \left\{ \sqrt{5}\, e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{5}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{5}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}, \sqrt{5}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}.$$

(b) [3P] Es gilt $|x - \pi| = \begin{cases} x - \pi, & \text{falls } x \geq \pi, \\ \pi - x, & \text{falls } x < \pi \end{cases}$. Wir brauchen also eine Fallunterscheidung, ob $x \geq \pi$ oder $x < \pi$.

1. Fall: Für $x \geq \pi$ gilt

$$|x - \pi| \leq 2x \;\Leftrightarrow\; x - \pi \leq 2x \;\Leftrightarrow\; x \geq -\pi.$$

Deswegen $L_1 := [\pi, \infty[\cap [-\pi, \infty[= [\pi, \infty[$.

2. Fall: Für $x < \pi$ gilt

$$|x - \pi| \leq 2x \;\Leftrightarrow\; -(x - \pi) \leq 2x \;\Leftrightarrow\; \pi \leq 3x \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{\pi}{3}.$$

Deswegen $L_2 :=]-\infty, \pi[\cap [\frac{\pi}{3}, \infty[= [\frac{\pi}{3}, \pi[$.

Insgesamt ergibt sich damit

$$L := L_1 \cup L_2 = [\pi, \infty[\cup [\frac{\pi}{3}, \pi[= [\frac{\pi}{3}, \infty[.$$

(c) [3P] Damit alle Terme definiert sind muss $x > 0$ gelten. Dann gilt mit den Logarithmus Gesetzen:

$$1 + \frac{2}{3}\ln x = 1 + 2\ln(x^{1/3}) = \ln(\sqrt[3]{x^5}) = \frac{5}{3}\ln x.$$

Wir ziehen auf beiden Seiten $\frac{2}{3}\ln x$ ab und erhalten

$$1 = \ln x.$$

Da der Logarithmus bijektiv ist und $\ln(e) = 1$ gilt, ist die einzige reelle Lösung der Gleichung durch $x = e$ gegeben.

4. Aufgabe **(10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a) [4P] Es handelt sich hier um ein uneigentliches Integral. Daher mus die Grenze $-\infty$ erst druch einen Grenzwert ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to-\infty} \int_b^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to-\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_b^{-1} \\
&= \lim_{b\to-\infty} \left(1+\frac{1}{b}\right) = 1+0 = 1.
\end{aligned}$$

(b) [6P] Zunächst substituieren wir $t=\sqrt{x}$.

1. Alternative: $t := \sqrt{x}$ ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ also “}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\text{” bzw. “}\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t\text{”}.$$

2. Alternative: $x := t^2$ ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t, \text{ also “}\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t\text{”}.$$

In jedem Fall erhalten wir $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Außerdem ergibt sich für die Grenzen $x=0 \rightsquigarrow t=0$ und $x=\frac{\pi^2}{4} \rightsquigarrow t=\frac{\pi}{2}$. Für das Integral erhalten wir somit

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)2t\,\mathrm{d}t.$$

Nun benutzen wir partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)2t\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{(PI)}}{=} \Big[-2t\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(t))\,2\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{-\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe **(11 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f\colon]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}[\,\to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := 1+\sin(x^2)$.

(a) Berechnen Sie das Bild von f, d.h. $f(]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}[)$.

(b) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

zur Kontrolle: $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$

(c) Finden Sie alle lokalen Minimal- und Maximalstellen.

(d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_2 zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung:

(a) [2P] Zunächst gilt, dass für $x \in\,]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\,[$ der Wert x^2 im Interval $[0,\pi[$ liegt, d.h.

$$x \in\,]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\,[\quad \Rightarrow \quad x^2 \in [0,\pi[\,. \tag{1}$$

Insbesondere enthält $[0,\pi[$ das Intervall $[0,\pi/2]$, sodass $\sin(x^2)$ alle Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Deswegen ergibt sich

$$f(]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}[) = \{f(x)\,|\,x\in\,]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\,[\,\} = \{1+\sin(t)\,|\,t\in[0,\pi[\,\} = [1,2].$$

(b) [2P] Es gilt

$$f'(x) \overset{(\mathrm{KR})}{=} \cos(x^2)(x^2)' = 2x\cos(x^2)$$

und

$$f''(x) \overset{(\mathrm{PR})}{=} (2x)'\cos(x^2) + 2x\big(\cos(x^2)\big)' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2).$$

(c) [5P] Die Funktion f ist differenzierbar. Deswegen bestimmen wir alle Nullstellen der ersten Ableitung. Aus Teil (b) ergibt sich

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x\cos(x^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } \cos(x^2) = 0.$$

1. Fall: $x = 0$. Dann $f''(0) \overset{(\mathrm{b})}{=} 2\cos(0) = 2 > 0$, d.h. f hat in 0 ein lokales Minimum.

2. Fall: $\cos(x^2) = 0$. Wir müssen zunächst alle reellen Lösungen der Gleichung bestimmen, die im Intervall $]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}[$ liegen.

$$\cos(x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

Wegen Gleichung (1) muss $k = 0$ sein. Somit gibt es genau zwei Lösungen der Gleichung (2),

$$x^2 = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Die zweite Ableitung an den Stellen ergibt

$$f''\big(\sqrt{\pi/2}\,\big) = 2\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} - 4(\pi/2)\sin(\pi/2) = -2\pi < 0$$

und

$$f''\big(-\sqrt{\pi/2}\,\big) = 2\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} - 4(\pi/2)\sin(\pi/2) = -2\pi < 0.$$

An den Stellen $x = \sqrt{\pi/2}$ und $x = -\sqrt{\pi/2}$ hat f jeweils ein lokales Maximum.

(d) [2P] Das Taylorpolynom ist gegeben durch

$$T_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\,(x-0)^2 = 1 + 0\cdot x + \frac{2}{2}x^2 = 1 + x^2.$$

6. Aufgabe **(9 Punkte)**

(a) Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+k} = \frac{2n}{n+1}.$$

(b) Wenden Sie den Mittelwertsatz auf die Funktion $\ln(x)$ an, um zu zeigen, dass $\ln(15) \leq 14$.

Lösung:

(a) [5P] Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei

$$A(n)\colon \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+k} = \frac{2n}{n+1}.$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\text{linke S. von } A(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+k} = \frac{2}{1^2+1} = 1 = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = \text{rechte S. von } A(1).$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes n gilt $A(n)$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+k} = \frac{2n}{n+1}. \tag{IV}$$

Induktionsbeweis: Wir zeigen, dass wenn $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$, d.h.,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{k^2+k} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{k^2+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+k} + \frac{2}{(n+1)^2+(n+1)} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{2n}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2+(n+1)} \\
&= \frac{2n}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{2(n+1)}{n+2}.
\end{aligned}$$

(b) [4P] Die Funktion $\ln\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist differenzierbar. Für beliebige aber feste $x, y > 0$ mit $x < y$ ergibt sich aus dem Mittelwertsatz, dass ein $\xi \in]x,y[$ existiert, sodass

$$\frac{1}{\xi} = \ln'(\xi) = \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y) - \ln(x) = \frac{y-x}{\xi}. \tag{3}$$

Wir wählen $x = 1$, $y = 15$ und erhalten damit aus Gleichung (3), dass ein $\xi \in]1, 15[$ existiert, sodass

$$\ln(15) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \frac{15-1}{\xi} = \frac{14}{\xi} < 14. \tag{4}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da $\xi > 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\xi} < 1$.