Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
Gabriele Penn-Karras, Sebastian Riedel
Rosa Preiß, Martin Slowik, Lukas Wessels

Modulprüfung „Analysis I für Ingenieurwissenschaften“

Datum: 19. Februar 2018

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem doppelseitig handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, eine kurze, aber vollständige Begründung an. Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind maximal 60 Punkte erreichbar.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

$$\text{(i)} \quad \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \frac{3+4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

b) Sei das reelle Polynom $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$p(z) \;:=\; 2z^3 - 3z^2 + 8z - 12.$$

(i) Zeigen Sie, dass $2\mathrm{i}$ eine Nullstelle von p ist.

(ii) Folgern Sie daraus eine weitere komplexe Nullstelle von p.

(iii) Zerlegen Sie das Polynom in Linearfaktoren.

Lösung:

a) (i) [2 Punkte] Es gilt

$$\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} \;=\; \frac{3}{4}\left(\cos(-\pi/2) + \mathrm{i}\sin(-\pi/2)\right) \;=\; \frac{3}{4}\left(0 + \mathrm{i}(-1)\right) \;=\; -\frac{3}{4}\mathrm{i}.$$

(ii) [2 Punkte] Es gilt

$$\frac{3+4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \;=\; \frac{(3+4\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} \;=\; \frac{3-3\mathrm{i}+4\mathrm{i}+4}{1-\mathrm{i}^2} \;=\; \frac{7+\mathrm{i}}{2} \;=\; \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

b) (i) [1 Punkt] Es gilt

$$p(2\mathrm{i}) \;=\; 2(2\mathrm{i})^3 - 3(2\mathrm{i})^2 + 8(2\mathrm{i}) - 12 \;=\; -16\mathrm{i} + 12 + 16\mathrm{i} - 12 \;=\; 0.$$

(ii) [1 Punkt] Da p ein reelles Polynom ist, folgt, dass $-2\mathrm{i}$ ebenfalls eine Nullstelle ist.

(iii) [4 Punkte] Zunächst berechnen wir

$$(z - 2\mathrm{i})(z + 2\mathrm{i}) \;=\; z^2 + 4.$$

Nun führen wir eine Polynomdivision aus und erhalten

$$\begin{array}{l}
(2z^3 - 3z^2 + 8z - 12) \div (z^2 + 4) \;=\; 2z - 3. \\
-\underline{(2z^3 + 8z)} \\
\quad\; -3z^2 - 12 \\
\;-\underline{(-3z^2 - 12)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Das Polynom p zerfällt also in die Linearfaktoren

$$p(z) \;=\; 2(z - 2\mathrm{i})(z + 2\mathrm{i})(z - 3/2).$$

2. **Aufgabe** **(13 Punkte)**

a) Sei die Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \;:=\; x^3 + 6x + \sin(x).$$

(i) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle besitzt.

b) Sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x}, & x \neq 0,\\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist und berechnen Sie $g'(0)$.
Hinweis: Betrachten Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten.

c) Sei die Funktion $h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) \;:=\; \int_1^x \ln\left|\cos\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\right) + 2\right| \,\mathrm{d}t.$$

Geben Sie die Ableitung von h an.

Lösung:

a) (i) [3 Punkte] Zunächst ergibt sich für die Ableitung

$$f'(x) \;=\; 3x^2 + 6 + \cos(x).$$

Da der Cosinus nach unten durch -1 beschränkt ist, kann dies abgeschätzt werden durch

$$f'(x) \;\geq\; 3x^2 + 6 - 1 \;=\; 3x^2 + 5 \;\geq\; 5 \;>\; 0$$

für alle $x \in [-\pi,\pi]$. Daraus folgt, dass f streng monoton steigend ist.

(ii) [3 Punkte] Wir erhalten

$$f(-\pi) \;=\; (-\pi)^3 + 6(-\pi) + \sin(-\pi) \;=\; -\pi^3 - 6\pi \;<\; 0$$

und

$$f(\pi) \;=\; \pi^3 + 6\pi + \sin(\pi) \;=\; \pi^3 + 6\pi \;>\; 0.$$

Da f stetig ist, folgt somit aus dem Zwischenwertsatz, dass f eine Nullstelle im Intervall $[-\pi,\pi]$ besitzt. Da f streng monoton wachsend ist, folgt schließlich, dass f genau eine Nullstelle besitzt.
Es ist auch möglich die Nullstelle direkt anzugeben und dann mit der strengen Monotonie zu argumentieren.

b) [5 Punkte] Für den Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt sich

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{x} - 2}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^2}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - 2}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin(2x)}{2} \;=\; 0,$$

wobei zweimal der Satz von L'Hospital angewendet werden durfte, da

$$\lim_{x \searrow 0} (\sin(2x) - 2x) = \lim_{x \searrow 0} x^2 = 0$$

und weiterhin

$$\lim_{x \searrow 0} (2\cos(2x) - 2) = \lim_{x \searrow 0} 2x = 0.$$

Als Ableitung im Punkt 0 ergibt sich somit $g'(0) = 0$.

c) [2 Punkte] Die Ableitung ist gegeben durch

$$h'(x) \;=\; \ln \left| \cos\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \right) + 2 \right|.$$

3. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \ := \ \mathrm{e}^x - 2x.$$

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f.

c) Bestimmen Sie alle globalen Extremstellen von f.

Lösung:

a) [2 Punkte] Für die Ableitungen ergibt sich

$$f'(x) \ = \ \mathrm{e}^x - 2$$

und

$$f''(x) \ = \ \mathrm{e}^x.$$

b) [3 Punkte] Die erste Ableitung f' besitzt offensichtlich genau eine Nullstelle, nämlich $\ln(2)$. Also hat f nur bei $\ln(2)$ eine lokale Extremstelle. Einsetzen in die zweite Ableitung liefert

$$f''(\ln(2)) \ = \ \mathrm{e}^{\ln(2)} \ = \ 2 \ > \ 0,$$

also handelt es sich um ein lokales Minimum.

c) [2 Punkte] Da e^x streng monoton wachsend ist, folgt $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2 > 0$ für $x > \ln(2)$ und $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2 < 0$ für $x < \ln(2)$. Daraus folgt, dass f rechts von der lokalen Minimalstelle $\ln(2)$ streng monoton wachsend ist und links davon streng monoton fallend. Also gibt es keine globale Maximalstelle, und bei $\ln(2)$ handelt es sich um eine globale Minimalstelle.

4. **Aufgabe** **(12 Punkte)**

a) Überprüfen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert und berechnen Sie es gegebenenfalls:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,\mathrm{d}x$$

b) Sei $q\colon D_q \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) \;:=\; \frac{-3x+2}{(x+2)(x-4)}.$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D_q \subset \mathbb{R}$ von q an und berechnen Sie das Integral

$$\int_1^3 q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

a) [4 Punkte] Das Integral existiert nicht, denn es gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{s\searrow 0}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{s\searrow 0}\int_s^1 \frac{1}{x^{5/4}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{s\searrow 0}\int_s^1 x^{-5/4}\,\mathrm{d}x$$
$$\;=\; \lim_{s\searrow 0}\left(-4x^{-1/4}\right)\Big|_s^1 \;=\; \lim_{s\searrow 0}\left(-4+4s^{-1/4}\right) \;=\; \infty.$$

b) [8 Punkte] Der maximale Definitionsbereich ist gegeben durch $D_q = \mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$.
Zur Berechnung des Integrals setzen wir eine Partialbruchzerlegung an:

$$q(x) \;=\; \frac{-3x+2}{(x+2)(x-4)} \;=\; \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-4}.$$

Mit der Zuhaltemethode ergibt sich $A=-4/3$ und $B=-5/3$.
Also ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{-3x+2}{(x+2)(x-4)}\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_1^3 \frac{-4/3}{x+2}+\frac{-5/3}{x-4}\,\mathrm{d}x\\
&=\; -\frac{4}{3}\int_1^3 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \frac{5}{3}\int_1^3 \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x\\
&=\; -\frac{4}{3}\ln|x+2|\,\Big|_1^3 - \frac{5}{3}\ln|x-4|\,\Big|_1^3\\
&=\; -\frac{4}{3}\ln(5)+\frac{4}{3}\ln(3)-\frac{5}{3}\ln(1)+\frac{5}{3}\ln(3)\\
&=\; -\frac{4}{3}\ln(5)+3\ln(3).
\end{aligned}$$

5. **Aufgabe** **(6 Punkte)**

a) Geben Sie eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ an, die gegen 1 konvergiert, bei der jedes Folgenglied echt kleiner als 1 ist.

b) Geben Sie eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ an, die unbeschränkt ist, aber nicht bestimmt divergiert.

c) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3)(n-2n^2)}{n^4+3n^3}$$

Lösung:

a) [1 Punkt] Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch $a_n := 1 - 1/n$ für $n \geq 1$.

b) [2 Punkte] Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch $b_n := (-1)^n n$ für $n \geq 1$.

c) [3 Punkte] Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3)(n-2n^2)}{n^4+3n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^4+n^3+3n-6n^2}{n^4+3n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}-\frac{6}{n^2}}{1+\frac{3}{n}} = -2.
\end{aligned}$$

6. **Aufgabe** **(12 Punkte)**

Sei die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \; := \; \sin(\ln x).$$

a) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

b) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom T_2 von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

c) Zeigen Sie, dass der Absolutbetrag des Restgliedes $R_2(x)$ für $x \in [1, 3/2]$ beschränkt ist durch $1/12$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Rechnung verwenden, dass für alle $x \in (0,\infty)$ gilt

$$f'''(x) \; = \; \frac{3\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{x^3}.$$

Lösung:

a) [4 Punkte] Für die ersten beiden Ableitungen gilt

$$f'(x) \; = \; \frac{\cos(\ln x)}{x}, \qquad f''(x) \; = \; -\frac{\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{x^2}.$$

b) [4 Punkte] Für die Funktionswerte im Punkt $x_0 = 1$ gilt

$$f(1) \; = \; \sin(\ln 1) \; = \; \sin(0) \; = \; 0,$$

und

$$f'(1) \; = \; \frac{\cos(\ln 1)}{1} \; = \; \cos(0) \; = \; 1$$

und

$$f''(1) \; = \; -\frac{\sin(\ln 1) + \cos(\ln 1)}{1^2} \; = \; -\sin(0) - \cos(0) \; = \; -1.$$

Also ist das zweite Taylorpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned} T_2(x) \; &= \; f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= \; 0 + (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 \; = \; (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2. \end{aligned}$$

c) [4 Punkte] Das Restglied ist für $x \in [1, 3/2]$ gegeben durch

$$R_2(x) \;=\; \frac{f'''(\xi)}{3!}\,(x-1)^3 \;=\; \frac{3\sin(\ln\xi)+\cos(\ln\xi)}{6\xi^3}\,(x-1)^3,$$

wobei $\xi \in (1, x)$. Deshalb lässt sich das Restglied für $x \in [1, 3/2]$ folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
|R_2(x)| \;&=\; \left|\frac{3\sin(\ln\xi)+\cos(\ln\xi)}{6\xi^3}\,(x-1)^3\right| \\
&=\; \frac{|3\sin(\ln\xi)+\cos(\ln\xi)|}{6\xi^3}\,(x-1)^3 \\
&\leq\; \frac{4}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \;=\; \frac{1}{12},
\end{aligned}$$

wobei der Sinus und der Cosinus mit 1 abgeschätzt wurden, $1/\xi^3$ mit 1 abgeschätzt wurde und $(x-1)^3$ mit $(1/2)^3$ abgeschätzt wurde.