**Technische Universität Berlin** **2018/19 WiSe**
**Fakultät II – Institut für Mathematik** 28. August 2018
Dozenten: Prof. Dr. Martin Henk

# Probeklausur
# „Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: ........................................ Vorname: ........................................
Matr.–Nr.: .................................... Studiengang: ....................................

---

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

**Hinweise:**

- Neben einem einseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

**Falls nicht anders gefordert, ist ein vollständiger Lösungsweg anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).**

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

---

Bei der Klausur sind 60 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

**1. Aufgabe** (9 Punkte)

**In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.**

a) Berechnen Sie die normierte Zeilenstufenform der Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \end{bmatrix}$.

normierte Zeilenstufenform: $\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des reellen linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 77 \\ 13 \\ 69 \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{L} =$

c) Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ hat die normierte Zeilenstufenform $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis von Kern$(A)$ und dim(Kern$(A)$):

Basis:

Dimension:

Bestimmen Sie eine Basis von Bild$(A)$ und dim(Bild$(A)$):

Basis:

Dimension:

**2. Aufgabe** (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z$ der Gleichung $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$.

b) Berechnen Sie alle reellen Lösungen $x$ der Gleichung $\sin(2x) = \cos(x)$.

**3. Aufgabe** (3 Punkte)
Geben Sie den Ansatz für die reelle sowie die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^2+4}{(x-3)(x+1)^2(x^2+1)}$$

an.

**4. Aufgabe** (7 Punkte)
Gegeben sei die Menge $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : a - c = 0 \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass $T$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in T$ linear unabhängig sind.

c) $T$ ist dreidimensional. Bestimmen Sie eine Matrix $A$, so dass $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A \right\}$ eine Basis von $T$ ist.

**5. Aufgabe** (5 Punkte)
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -\alpha \\ -2 & \alpha & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ invertierbar?

**6. Aufgabe** (8 Punkte)
Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}_{\leq 1}[x] &\to \mathbb{R}^2, \\ ax + b &\mapsto \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $F$ eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie Kern($F$).

c) Ist $F$ invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung $F^{-1}$.

**7. Aufgabe** (8 Punkte)

Gegeben seien der Vektorraum $V = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_2 \end{bmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$ sowie die zwei Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von $V$ mit

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Weiterhin sei $L_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}$ die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L\colon V \to V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ mit

$$L_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}$ von $L$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ mithilfe von $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

**8. Aufgabe** (8 Punkte)

a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 - 4}{2n^2 + 10n + 8}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1. \end{aligned}$$

b) Es sei $q$ eine reelle Zahl mit $0 < q < 1$. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $c_0 = 0$, $c_{n+1} = qc_n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

i) Zeigen Sie, dass $c_n < \frac{1}{1-q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Untersuchen Sie $c_n$ auf Monotonie und Konvergenz und berechnen Sie ggf. den Grenzwert von $c_n$.

**9. Aufgabe** (5 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ als

$$f(x) = \begin{cases} \sin(ax), & x < 0, \\ (x-1)^2 + b & x \geq 0. \end{cases}$$

Für welche Parameter ist $f$ stetig in 0?

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

i) Ist $|f|$ eine stetige Funktion, so ist auch $f$ eine stetige Funktion.

ii) Ist $f : ]-1, 1[ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so besitzt $f$ ein globales Maximum oder Minimum.

iii) Jedes reelle Polynom vom Grad 5 besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

**Gesamtpunktzahl: 60 Punkte**