Technische Universität Berlin **SoSe 2018**
Fakultät II – Institut für Mathematik 11. Oktober 2018
Dozent: W. Stannat

Modulprüfung „Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“ Teil: „Analysis I“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann. (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO),
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit für die Teilleistung im Fach „Analysis I“ beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 45 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile (Analysis I und Lineare Algebra) der Klausur mindestens 40% der Punkte erreicht werden.

☐ **Ich habe bereits nach alter Prüfungsordnung die Modulklausur „Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“ bestanden/anerkannt bekommen.**

Korrektur Analysis I

1	2	3	4	5	6	Σ

Punktzahl:

Analysis I	Lineare Algebra	Gesamtpunktzahl
Σ	Σ	Σ

1. **Aufgabe** **(14 Punkte)**

   (a) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz für $n \to \infty$ und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

   $$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad b_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad c_n = \ln\left(1 + e^{-n}\right).$$

   (b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

   $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad \text{für } n \geq 1.$$

2. **Aufgabe** **(13 Punkte)**

   Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x+1)(x+4)}\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}\,\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int x e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   Hinweis: Bitte keine gerundeten Ergebnisse.

3. **Aufgabe** **(8 Punkte)**

   (a) Geben Sie die komplexe Zahl $z = \frac{i}{1-i}$ in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an.

   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -1 + i$. Geben Sie diese in Polarkoordinaten an.

4. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

   Gegeben ist

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2.$$

   (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f im Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und begründen Sie jeweils, ob es sich um eine Minimal– oder Maximalstelle handelt.

   (b) Besitzt f ein globales Maximum oder ein globales Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

   Es sei die folgende Funktion gegeben

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass f auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

6. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

   Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) Es sei f eine ungerade Funktion. Ist dann $|f(x)|$ eine gerade Funktion?

   (b) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Es gelte

   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

   und g sei beschränkt. Besitzt dann die Funktion $f - g$ eine Nullstelle?

   (c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x+\pi)| = |f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (d.h. $|f|$ ist π-periodisch). Gilt dann auch $f(x+\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

Gesamtpunktzahl: 60 Punkte