Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: G. Penn-Karras, P. Winkert
Ass.: M. März, M. Oster

Modulprüfung (Testklausur I)
„Analysis I für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.
- In Aufgabe 1 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie keine Rechnungen an. In allen anderen Aufgaben ist immer ein vollständiger Lösungsweg auf eigenem Papier anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(12 Punkte)**

(a) **In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Kreuzen Sie jeweils die richtige Lösung an. Pro Teilaufgabe ist genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keine Punkte. Falsch markierte Antworten bitte so ■ kennzeichnen.**

i. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \cdot \sqrt{\frac{1}{n+1}}$ gilt:

- ☐ Sie ist monoton wachsend.
- ☐ $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- ☐ Sie ist divergent.
- ☐ Sie ist beschränkt.

ii. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} b_n = -\infty$. Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = -\infty$.
- ☐ Keine Aussage kann im Allgemeinen getroffen werden.

iii. Sei p ein reelles Polynom vom Grad 5. Dann gilt:

- ☐ p hat genau 6 verschiedene Nullstellen.
- ☐ p hat keine Linearfaktorzerlegung in $\mathbb{C}$.
- ☐ p hat nur komplexe Nullstellen.
- ☐ p hat mindestens eine reelle Nullstelle.

iv. Für die Funktion $\cos(\sin(x)) + \sqrt{|x|}$ gilt:

- ☐ Sie besitzt im Intervall $[-1, 1]$ ein Minimum.
- ☐ Sie ist auf dem Intervall $[-1, 1]$ unbeschränkt.
- ☐ Sie ist nicht stetig.
- ☐ Sie ist differenzierbar.

v. Die Funktion $\sin(x) \cdot \cos(x)$ hat die folgende Eigenschaft:

- ☐ Sie ist ungerade.
- ☐ Sie hat keine Nullstellen.
- ☐ Sie ist unbeschränkt.
- ☐ Ihre Fourierkoeffizienten sind alle 0.

vi. Betrachten Sie die Gleichung $z^4 = -1$. Dann gilt für die Lösungen $z \in \mathbb{C}$:

- ☐ Die Gleichung hat keine Lösung.
- ☐ Es gibt unendlich viele verschiedene Lösungen.
- ☐ Für alle Lösungen z gilt $|z| = 1$.
- ☐ Die Gleichung hat nur reelle Lösungen.

vii. Für die im Intervall $[0, 2]$ differenzierbare Funktion f gelte $f(0) = 3$ und $f(2) = 5$. Dann gilt:

- ☐ Es gibt einen Punkt $x \in]0, 2[$ mit $f'(x) = 1$.
- ☐ f ist nicht stetig auf $[0, 2]$.
- ☐ f hat kein Maximum auf $[0, 2]$.

☐ Keine der oberen Möglichkeiten.

(b) In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

i. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 2n}{19 + 4n^2 - 2n^3} =$

ii. $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)} =$

iii. $\frac{d}{dx} \frac{e^{x^2}}{(x-1)^2} =$

Hinweis: keine weitere Vereinfachung nötig.

iv. Geben Sie den Ansatz der Partialbruchzerlegung für die

folgende rationale Funktion an:

$\frac{3x-2}{x^3 + x^2 - 5x + 3} =$

v. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge.

Was ist der Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{n+1} - a_n$?

$\lim_{n\to\infty} (b_n) =$

Lösung:

(a) Kreuzen Sie jeweils die richtige Lösung an. Pro Teilaufgabe ist genau eine Aussage richtig. Falsch markierte Antworten bitte so ■ kennzeichnen.

i. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \cdot \sqrt{\frac{1}{n+1}}$ gilt:

☐ Sie ist monoton wachsend.
☐ $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
☐ Sie ist divergent.
☒ Sie ist beschränkt.

ii. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{x\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} b_n = -\infty$. Dann gilt:

☐ $\lim_{x\to\infty} a_n + b_n = 0$.
☐ $\lim_{x\to\infty} a_n + b_n = \infty$.
☐ $\lim_{x\to\infty} a_n + b_n = -\infty$.
☒ Keine Aussage kann im Allgemeinen getroffen werden.

iii. Sei p ein reelles Polynom vom Grad 5. Dann gilt:

- ☐ p hat genau 6 verschiedene Nullstellen.
- ☐ p hat keine Linearfaktorzerlegung in $\mathbb{C}$.
- ☐ p hat nur komplexe Nullstellen.
- ☒ p hat mindestens eine reelle Nullstelle.

iv. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(\sin(x)) + \sqrt{|x|}$ gilt:
- ☒ Sie besitzt im Intervall $[-1, 1]$ ein Minimum.
- ☐ Sie ist auf dem Intervall $[-1, 1]$ unbeschränkt.
- ☐ Sie ist nicht stetig.
- ☐ Sie ist differenzierbar.

v. Die Funktion $\sin(x) \cdot \cos(x)$ hat die folgende Eigenschaft:
- ☒ Sie ist ungerade.
- ☐ Sie hat keine Nullstellen.
- ☐ Sie ist unbeschränkt.
- ☐ Ihre Fourierkoeffizienten sind alle 0.

vi. Betrachten Sie die Gleichung $z^4 = -1$. Dann gilt für die Lösungen $z \in \mathbb{C}$:
- ☐ Die Gleichung hat keine Lösung.
- ☐ Es gibt unendlich viele verschieden Lösung.
- ☒ Für alle Lösungen z gilt $|z| = 1$.
- ☐ Die Gleichung hat nur reelle Lösungen.

vii. Für die im Intervall $[0, 2]$ differenzierbare Funktion f gelte $f(0) = 3$ und $f(2) = 5$. Dann gilt:
- ☒ Es gibt einen Punkt $x \in]0, 2[$ mit $f'(x) = 1$.
- ☐ f ist nicht stetig auf $[0, 2]$.
- ☐ f hat kein Maximum auf $[0, 2]$.
- ☐ Keine der oberen Möglichkeiten.

(b) In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

i. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 2n}{19 + 4n^2 - 2n^3} =$ $\boxed{\frac{-3}{2}}$

ii. $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1 - \cos(x)} =$ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + x\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - x\sin(x)}{-\cos(x)} = 2}$

iii. $\frac{d}{dx} \frac{e^{x^2}}{(x-1)^2} =$ $\boxed{\frac{e^{x^2}(2x(x-1)^2 - 2(x-1))}{(x-1)^4}}$ *Hinweis:* keine weitere Vereinfachung nötig

iv. Geben Sie den Ansatz der Partialbruchzerlegung für die folgende rationale Funktion an:

$\frac{3x - 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3} =$ $\boxed{\frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}}$

v. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge.

Was ist der Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{n+1} - a_n$?

$\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) =$ $\boxed{0}$

2. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_3^4 \frac{2x+12}{x^2-4}\,dx$,

(b) $\int_0^\pi \cos(x)\cdot\ln(\sin(x))\,dx$,

(c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$.

Lösung:

(a)

$$\int_3^4 \frac{2x+12}{x^2-4}\,dx = \int_3^4 \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x+2}\,dx = (4\ln|x-2| - 2\ln|x+2|)|_{x=3}^{x=4} = 2\ln\left(\frac{10}{3}\right).$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(x)\cdot\ln(\sin(x))dx &= \lim_{a\to 0}\int_a^{\frac{\pi}{2}} \ln(y)\,dx + \lim_{b\to\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^b \cos(x)\ln(\sin(x))\,dx \\
&= \lim_{a\to 0}\int_{\sin(a)}^1 \ln(y)dy + \lim_{b\to\pi}\int_1^{\sin(b)} \ln(y)dy \\
&= \lim_{a\to 0} y\ln|y| + y|_{\sin(a)}^{\frac{\pi}{2}} + \lim_{b\to\pi} y\ln|y| + y|_{\frac{\pi}{2}}^{\sin(b)} \\
&= \lim_{y\to 0} y\ln(y) - 1 + 1 - \lim_{y\to 0} y\ln(y) \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0
\end{aligned}$$

mit $y = \sin(x)$ und $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$ sowie $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

(c)

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx &= x\sin(x)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \\
&= 0 - (-\cos(x))|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.
\end{aligned}$$

3. **Aufgabe** **(8 Punkte)**

Untersuchen Sie die beiden folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2+5}$.

Lösung:

(a) Wir benutzen das Vergleichskriterium (Minorantenkriterium):
Wegen $\frac{n+1}{n^2} > \frac{1}{n}$ und der Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ auch.

(b) Hier wenden wir das Leibnizkriteriums an:
Der Ausdruck $(-1)^n \frac{2}{n^2+5}$ alterniert. Außerdem ist $\frac{2}{n^2+5}$ eine monotone Nullfolge. Somit konvergiert die Reihe nach Leibniz.

4. **Aufgabe** **(11 Punkte)**

(a) Berechnen Sie das 2-te Taylorpolynom von $f(x) = \frac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 1$ und bestimmen Sie das dazugehörige Restglied.

(b) Sei $f(x) = \sin(x)$ und T_1 das Taylorpolynom vom Grad 1 an der Stelle $x = 0$. Dann ist das Restglied

$$R_1(x) = \frac{-\sin(\xi)}{2} x^2$$

für ein ξ zwischen 0 und x. Zeigen Sie, dass der Fehler $|f(x) - T_1(x)| \leq 0.125$ für $x \in [-0.5, 0.5]$.

(c) Zeigen Sie, dass $T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_0+n)e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n$ das n-te Taylorpolynom von xe^x ist.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \; f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Also ist

$$f(1) = \frac{1}{2}, \; f'(1) = -\frac{1}{4}, \; f''(1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \; f'''(x) = -6 \cdot \frac{1}{(1+x)^4}.$$

Also gilt

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2$$

und

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 = \frac{-1}{(1+\xi)^4}(x-1)^4$$

für ein ξ zwischen 1 und x.

(b) Es gilt:

$$|f(x) - T_1(x)| = |R_1(x)| = \left| \frac{-\sin(\xi)}{2}(x^2) \right| \leq \frac{1}{2}(0.5)^2 = 0.125.$$

(c) $T_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_0+n)e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n$ ist das Taylorpolynom vom Grad n der Funktion $f(x) = xe^x$ falls
$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dies kann man mit Induktion zeigen:
Induktionsanfang ($n = 1$): $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$
Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.
Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $f^{(n+1)}(x) = (x+(n+1)) \cdot e^x$.
Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \overset{IV}{=} ((x+n) \cdot e^x)' \\ &= (e^x + (x+n)e^x) = (1+(x+n))e^x \\ &= (x+(n+1))e^x. \end{aligned}$$

5. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und die Nullstellen von f.
b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to 0} f(x)$.
c) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f. Gibt es ein globales Maximum? Gibt es ein globales Minimum?

Hinweis: Für die zweite Ableitung gilt: $f''(x) < 0$ für $x < e^{5/6}$ und $f''(x) > 0$ für $x > e^{5/6}$.

Lösung:

(a) Es gilt $D_{\ln x} =]0, \infty[$ und $D_{1/x^2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$. Der maximale Definitionsbereich ist deshalb $D =]0, \infty[$.
Die Nullstellen sind: $\ln(x) = 0$, also $x = 1$.

(b) Nach l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \quad .$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\ln(x)x^2 = -\infty.$$

(c) Es gilt

$$f(x) = \ln x \cdot x^{-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}x^{-2} - 2(\ln x \cdot x^{-3}) = x^{-3}(1 - 2\ln x),$$

f ist differenzierbar auf D_f, daher sind alle Extrema Nullstellen der ersten Ableitung. Somit gilt $f'(x) = x^{-3}(1 - 2\ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2\ln x \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$.

Mit dem Hinweis folgt, dass f bei $x = \sqrt{e}$ ein lokales Maximum hat.
Mit Grenzwerten von Teil (b) folgt, dass dort auch das globale Maximum ist. Aus den Grenzwerten von Teil b) folgt, dass es kein globales Minimum gibt.

6. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

(a) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $8^{\ln(e^{2x})} = \sqrt[3]{2^8 \cdot 4^x}$.
(b) Sei z die **komplexe** Zahl $z = \frac{1}{i+1}$. Geben Sie z in der Form $z = a + bi$ und $z = re^{i\varphi}$ an mit $0 < r \in \mathbb{R}$ und $\Phi \in [0, 2\pi[$.
(c) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $\sin^3(x) = -\cos^2(x)\sin(x)$.

Lösung:

(a)
Es gilt:

$$\begin{aligned} & 8^{\ln(e^{2x})} = \sqrt[3]{2^8 \cdot 4^x} \\ \Leftrightarrow\quad & 8^{2x} = 2^{\frac{8}{3}} 4^{\frac{x}{3}} \\ \Leftrightarrow\quad & 2^{6x} = 2^{\frac{8+2x}{3}} \\ \Leftrightarrow\quad & 18x = 8 + 2x \\ \Leftrightarrow\quad & x = 1/2. \end{aligned}$$

(b) Aus $z = \frac{1}{i+1} = -\frac{i-1}{2}$ kann $a = 1/2, b = -1/2$ abgelesen werden.
Polarform: $r = 1/\sqrt{2}, \varphi = 7\pi/4$.

(c)
Es gilt:

$$\begin{aligned} & 0 = \sin^3(x) + \cos^2(x)\sin(x) \\ \Leftrightarrow\quad & \sin(x)[\sin^2(x) + \cos^2(x)] = \sin(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also gilt $\mathbb{L} = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$