Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: G. Penn-Karras, P. Winkert
Ass.: M. März, M. Oster

Modulprüfung (Testklausur I)
„Analysis I für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen für die Aufgaben 2 bis 8 in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für die Aufgabem 2 bis 8 jeweils ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.
- In Aufgabe 1 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie keine Rechnungen an. In allen anderen Aufgaben ist immer ein vollständiger Lösungsweg auf eigenem Papier anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(12 Punkte)**

(a) **In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Kreuzen Sie jeweils die richtige Lösung an. Pro Teilaufgabe ist genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keine Punkte. Falsch markierte Antworten bitte so ■ kennzeichnen.**

i. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3n^2+1}{2n-n^2+1}$ gilt:

- ☐ Sie ist monoton wachsend.
- ☐ $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- ☐ Sie ist nicht konvergent.
- ☐ Sie ist unbeschränkt.

ii. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} b_n = 0$. Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot b_n = -1$.
- ☐ Keine der obigen Aussage kann im Allgemeinen getroffen werden.

iii. Sei $p(z) = z^5 - i \cdot z^2 - 2i$ ein Polynom. Eine Nullstelle von p ist $z = i$. Dann gilt:

- ☐ p hat höchstens 5 verschiedene Nullstellen.
- ☐ Dann ist $z = -i$ auch eine Nullstelle.
- ☐ p ist nicht durch $(z - i)$ teilbar.
- ☐ p ist beschränkt.

iv. Für die Funktion $e^{\frac{3x}{1+x^2}} \cdot (\sin(x) + 2)$ gilt:

- ☐ Sie besitzt im Intervall $[-1, 1]$ kein Minimum.
- ☐ Sie hat in dem Intervall $[-1, 1]$ eine Nullstelle.
- ☐ Sie ist nicht stetig.
- ☐ Sie ist differenzierbar.

v. Die Funktion $\sin^2(2x)$ hat die folgende Eigenschaft:

- ☐ Sie ist gerade.
- ☐ Sie ist immer negativ.
- ☐ Sie ist monoton wachsend.
- ☐ Ihre Fourierkoeffizienten sind alle 0.

vi. Betrachten Sie die Gleichung $z^3 + z = 0$. Dann gilt für die Lösungen $z \in \mathbb{C}$:

- ☐ Die Gleichung hat genau 3 verschiedene Lösungen.
- ☐ Es gibt keine Lösungen.
- ☐ Für alle Lösungen z gilt $|z| > 1$.
- ☐ Die Gleichung hat nur komplexe Lösungen.

vii. Für die auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion f gelte die Differentialgleichung $f'(x) = f(x)$ mit $f(0) = 1$. Dann gilt:

- ☐ für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = f(x)$.
- ☐ f ist nicht stetig auf $\mathbb{R}$.
- ☐ $f(x) = x^2$.

☐ Keine der oberen Möglichkeiten.

(b) In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - 2n}{19 + 4n^2 - 2n^3 \cdot \sqrt{n}} =$ ☐

ii. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\cos(\frac{\pi}{2} \cdot x)} =$ ☐

iii. $\dfrac{d}{dx} \dfrac{\ln(x^{x^2})}{2} =$ ☐

iv. Geben Sie den Ansatz der Partialbruchzerlegung für die folgende rationale Funktion an:

$\dfrac{3x-2}{x^2-2} =$ ☐

v. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Was ist der Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$?

$\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) =$ ☐

Lösung:

(a) **In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Kreuzen Sie jeweils die richtige Lösung an. Pro Teilaufgabe ist genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keine Punkte. Falsch markierte Antworten bitte so ■ kennzeichnen.**

i. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3n^2+1}{2n-n^2}$ gilt:

- ☐ Sie ist monoton wachsend.
- ☐ $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- ☒ Sie ist nicht konvergent.
- ☐ Sie ist unbeschränkt.

ii. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} b_n = 0$. Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot b_n = -1$.
- ☒ Keine der obigen Aussage kann im Allgemeinen getroffen werden.

iii. Sei $p(z) = z^5 - i \cdot z^2 - 2i$ ein Polynom. $z = i$ ist eine Nullstelle von p. Dann gilt:

- ☒ p hat höchstens 5 verschiedene Nullstellen.
- ☐ Dann ist $z = -i$ auch eine Nullstelle.
- ☐ p ist nicht durch $(z - i)$ teilbar.
- ☐ p ist beschränkt.

iv. Für die Funktion $e^{\frac{3x}{1+x^2}} \cdot (\sin(x) + 2)$ gilt:

- ☐ Sie besitzt im Intervall $[-1, 1]$ kein Minimum.
- ☐ Sie hat in dem Intervall $[-1, 1]$ eine Nullstelle.
- ☐ Sie ist nicht stetig.
- ☒ Sie ist differenzierbar.

v. Die Funktion $\sin^2(2x)$ hat die folgende Eigenschaft:

- ☒ Sie ist gerade.
- ☐ Sie ist immer negativ.
- ☐ Sie ist monoton wachsend.
- ☐ Ihre Fourierkoeffizienten sind alle 0.

vi. Betrachten Sie die Gleichung $z^3 + z = 0$. Dann gilt für die Lösungen $z \in \mathbb{C}$:

- ☒ Die Gleichung hat genau 3 verschiedene Lösungen.
- ☐ Es gibt keine Lösungen.
- ☐ Für alle Lösungen z gilt $|z| > 1$.
- ☐ Die Gleichung hat nur komplexe Lösungen.

vii. Für die auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion f gelte die Differentialgleichung $f'(x) = f(x)$ mit $f(0) = 1$. Dann gilt:

- ☒ für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = f(x)$.
- ☐ f ist nicht stetig auf $\mathbb{R}$.
- ☐ $f(x) = x^2$.
- ☐ Keine der oberen Möglichkeiten.

(b) In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

i. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - 2n}{19 + 4n^2 - 2n^3 \cdot \sqrt{n}} =$ $\boxed{0}$

ii. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\cos(\frac{\pi}{2} \cdot x)} =$ $\boxed{-\dfrac{2}{\pi}}$

iii. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\ln(x^{x^2})}{2} =$ $\boxed{\dfrac{x}{2}(1 + 2\ln(x))}$

iv. Geben Sie den Ansatz der Partialbruchzerlegung für die folgende rationale Funktion an:

$\dfrac{3x - 2}{x^2 - 2} =$ $\boxed{\dfrac{A}{(x + \sqrt{2})} + \dfrac{B}{x - \sqrt{2}}}$

v.Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Was ist der Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$?

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) =$ $\boxed{1}$

2. **Aufgabe** **(12 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx, \qquad \text{b)} \int \ln(x^2) dx, \qquad \text{c)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Lösung:

a)

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin(u) du = -2\cos(u)|_{\pi}^{2\pi} = -4$$

mit $u = \sqrt{x}$ und $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

b)

$$\int \ln(x^2) dx = x\ln(x^2) - \int x \cdot 2x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = x\ln(x^2) - \int 2\, dx = x\ln(x^2) - 2x + c.$$

mit $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$ mit $u'(x) = 1$ und $v(x) = \ln(x^2)$.

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{a\to 0} 2\sqrt{(x)}|_a^1 = \lim\limits_{a\to 0} 2 - 2\sqrt{a} = 2.$

3. **Aufgabe** **(12 Punkte)**

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3.$$

(b) Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 5}{2}$.

- Weisen Sie $a_n < 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach.
- Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Folge.
- Konvergiert die Folge? Falls ja, berechnen Sie deren Grenzwert.

Lösung:

(a) Induktionsanfang: $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1}(3k^2 - 3k + 1) = 3 - 3 + 1 = 1$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$.
Induktionsbehauptung: Dann gilt: $\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2 - 3k + 1) = (n + 1)^3$.
Induktionsbeweis: $\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2-3k+1) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1)+3(n+1)^2-3(n+1)+1 \overset{\mathbf{IV}}{=} n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n + 1)^3$.

(b) Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 5}{2}$.

- Induktionsanfang $a_0 = 1 < 5$.
  Induktionsvoraussetzung: $a_n < 5$.
  Induktionsbehauptung: $a_{n+1} < 5$.
  Induktionsschritt:
  $$a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2} \overset{IV}{<} \frac{5 + 5}{2} = 5.$$
- Die Folge wächst monoton.
  Induktionsanfang $a_0 = 1 < a_1 = 3$.
  Induktionsvoraussetzung: $a_n < a_{n+1}$.
  Induktionsbehauptung: $a_{n+1} < a_{n+2}$.
  Induktionsschritt:
  $$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 5}{2} \overset{IV}{>} \frac{a_n + 5}{2} = a_{n+1}$$
  $$\begin{array}{rrcl} IV: & a_n & < & a_{n+1} \\ \Rightarrow & a_n + 5 & < & a_{n+1} + 5 \\ \Rightarrow & \dfrac{a_n + 5}{2} & < & \dfrac{a_{n+1} + 5}{2} \\ \Rightarrow & a_{n+1} & < & a_{n+2}. \end{array}$$
- Die Folge ist monoton wachsend und beschränkt nach oben. Also konvergiert die Folge. Wir erhalten für den Grenzwert a die Gleichung
  $$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 5}{2} = \frac{a + 5}{2}$$
  welche die Lösung $a = 5$ besitzt. Somit ist der Grenzwert 5.

4. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{, falls } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{, falls } x \in \{-\pi, 0, \pi\}, \\ 1 & \text{, falls } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lösung:

Die Funktion f ist ungerade , also sind alle $a_k = 0$.
Für die b_k gilt:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\; dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\; dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\; dx = -\frac{2}{k\pi}\cos(kx)|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{k\pi}((-1)^k - 1). \end{aligned}$$

Also bekommen wir als Fourierreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k)\sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)x).$$

5. **Aufgabe** **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von:

(a) $\frac{|x-2|}{x+6} \geq 1$,

(b) $\dfrac{3}{|2x-4|} > 2$,

für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Für $x < -6$ wird der Ausdruck
$$\frac{|x-2|}{x+6}$$
negativ. Also kann kein $x < -6$ die Ungleichung lösen. Für $x > -6$ ist $x + 6 > 0$. Damit erhält man
$$|x-2| \geq x+6.$$
Fallunterscheidung:
(1) $x \geq 2$: man erhält $x - 2 \geq x + 6$, d.h. $0 \geq 8$, also $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.
(2) $x < 2$: dann $2 - x \geq x + 6$, woraus sich $x \leq -2$ ergibt, also $\mathbb{L}_2 =]-6, -2]$.
Insgesamt ergibt sich: $\mathbb{L}_{ges} =]-6, -2]$.

(b) Definiert sind die Ausdrücke für $x \neq 2$. Wir unterscheiden die Fälle $x > 2$ und $x < 2$.
1. Fall $x > 2$: Wir erhalten $3 > 4x - 8$ und damit die erste Lösungsmenge $]2, 11/4[$.
2. Fall $x < 2$: Wir erhalten $3 > 8 - 4x$ und damit die zweite Lösungsmenge $]5/4, 2[$.
Insgesamt ergibt sich somit die Lösungsmenge $L =]5/4, 2[\cup]2, 11/4[$.

6. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

(a) Finden Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1)^2 & \text{für } x < 0, \\ \cos(\frac{x}{2}) + x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi, \\ be^{x-\pi} & \text{für } x > \pi. \end{cases}$$

(b) Untersuchen Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit:

$$f(x) = x \cdot |x|.$$

(c) Hat die Funktion $f(x) = e^{x^2} + 2\sin(x - \frac{\pi}{2})$ eine Nullstelle auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?

Lösung:

(a) Wir erhalten:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} a(x+1)^2 = a \stackrel{!}{=} 1 = f(0) \stackrel{*}{=} \lim_{x \to 0^+} f(x),$$

wobei für die letzte Gleichheit genutzt wurde, dass $\cos(\frac{\pi}{2}) + x$ stetig auf $[0, \pi]$ ist. Also $a = 1$.
Weiter gilt:

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) \stackrel{*}{=} f(\pi) = \pi \stackrel{!}{=} b = \lim_{x \to \pi} be^{x-\pi} = \lim_{x \to \pi^+} f(x)$$

Also $b = \pi$, wobei für '$*$' genutzt wurde, dass $\cos(\frac{\pi}{2}) + x$ stetig auf $[0, \pi]$ ist.
Außerdem ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0, \pi\}$ stetig, da $a(x+1)^2, \cos(\frac{x}{2}) + x, be^{x-\pi}$ stetig sind.

(b) Es gilt, dass $f(x) = -x^2$ falls $x < 0$ und $f(x) = x^2$ falls $x > 0$ und somit ist f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
In $x = 0$ gilt:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2}{h} = 0$$

sowie

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = 0.$$

Also ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(c) Die Funktion f ist stetig .
Weiter gilt $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi^2}{4}} > 0$ und $f(0) = e^0 + 2\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$.
Also gilt nach dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle gibt.