Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: G. Penn-Karras, P. Winkert
Ass.: M. März, M. Oster

Wintersemester 2018/2019
18. Februar 2019

Modulprüfung
„Analysis I für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- In Aufgabe 1, 2 und 3 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie **keine Rechnungen** an.
- In den Aufgaben 4, 5 und 6 ist immer ein **vollständiger Lösungsweg auf eigenem Papier** anzugeben (Rechnung und/oder Begründung). Verwenden Sie für die Aufgaben 4, 5 und 6 jeweils ein neues DIN A4-Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten nicht begründen. Kreuzen Sie jeweils die richtige Lösung an. Pro Teilaufgabe ist genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keine Punkte. Falsch markierte Antworten bitte so ■ kennzeichnen.

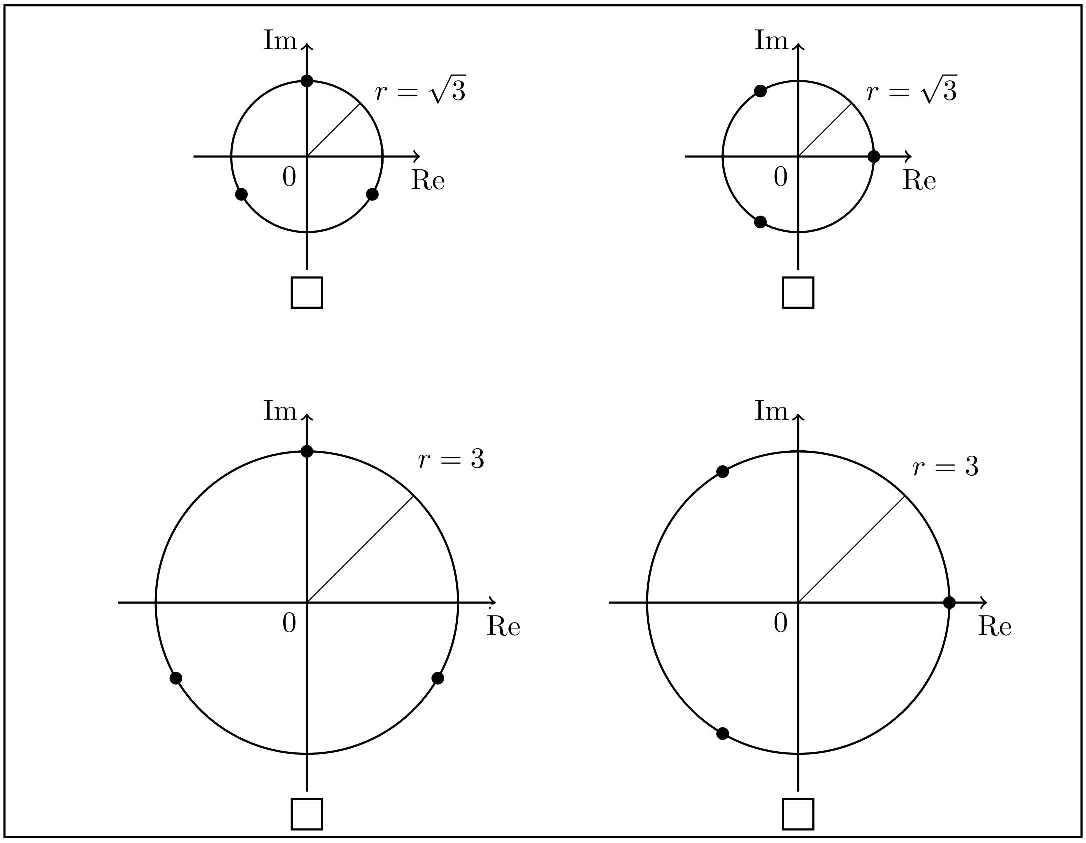
(a) Sei $f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x-1)^2$ eine Funktion. Dann gilt:

- ☐ f ist surjektiv.
- ☐ f ist injektiv.
- ☐ f hat kein Maximum.
- ☐ $f(x) < 0$ für alle $x \in \{1,2,3\}$.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 1$.
- ☐ Keine der obigen Aussagen kann im Allgemeinen getroffen werden.

(c) Welche der folgenden Skizzen enthält alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -27i$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



(d) Sei p ein Polynom mit $p(z) = z^3 - 22z^2 + 7z - 1$. Dann gilt:

- ☐ p hat mindestens 4 verschiedene Nullstellen.
- ☐ p hat mindestens einen reellen Linearfaktor.
- ☐ p hat keine komplexe Linearfaktorzerlegung.
- ☐ p hat keine reelle Nullstelle.

(e) Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = e^{-\sqrt{(x^2+1)}+1}$. Dann gilt:

- ☐ Sie besitzt im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle.
- ☐ Sie hat auf dem Intervall $[0, 1]$ ein Maximum.
- ☐ Sie ist nicht stetig.
- ☐ Sie hat die Stammfunktion $F(x) = xe^{-\sqrt{x^2+1}+1}$.

(f) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 13x^3 - 3x$ hat die folgende Eigenschaft:

- ☐ Sie ist ungerade.
- ☐ Sie hat keine Nullstellen.
- ☐ Sie hat genau 3 Stellen $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.
- ☐ Sie hat keine Stammfunktion.

(g) Betrachten Sie die Gleichung $z^4 = -1 + i$. Dann gilt für die Lösungen $z \in \mathbb{C}$:

- ☐ Die Gleichung hat genau 4 verschiedene Lösungen.
- ☐ Es gibt unendlich viele verschiedene Lösungen.
- ☐ Für alle Lösungen z gilt $|z| = 1$.
- ☐ Die Gleichung hat nur reelle Lösungen.

(h) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann gilt:

- ☐ Es gibt einen Punkt $\xi \in]0, 1[$, sodass das Rechteck mit Höhe $f(\xi)$ und Breite 1 den Flächeninhalt $A = \int_0^1 f(x)\, dx$ hat.
- ☐ f ist nicht integrierbar auf $[0, 1]$.
- ☐ f hat kein Maximum auf $[0, 2]$.
- ☐ Keine der oberen Möglichkeiten.

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, gerade Funktion. Dann gilt:

- ☐ $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ $f'(x) = 0$ für $x = 0$.
- ☐ f ist injektiv.
- ☐ $f(x) = x^3$.

(j) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x) + 2\cos(2x)$ eine Funktion. Dann gilt:

- ☐ f ist nicht periodisch.
- ☐ Für $b_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx$ gilt: $b_k = 0$ mit $k \in \mathbb{N}$.
- ☐ f ist streng monoton wachsend.
- ☐ Alle Fourierkoeffizienten sind 0.

2. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4 - 12n^2 + 3n^3}{n^3(2n+1)} =$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{(n^2+1)} =$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2}{\cos(x)} =$$

(d) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} =$$

(e) $$\frac{d}{dx} \ln(x^x) =$$

(f) $$\frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{\sin(x)} \right) =$$

(g) $$\int x^3 - \cos(x)\ dx = \qquad +c,\ c \in \mathbb{R}$$

(h) Geben Sie den Ansatz der Partialbruchzerlegung für die folgende rationale Funktion an:

$$\frac{5x^3 - 12x + 1}{x^2(x^2-1)} =$$

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Was ist der Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{2}$?

$$\lim_{n\to\infty} (b_n) \quad = \quad \boxed{}$$

(j) Welche kleinste Periode T hat die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(5x)$

$$T \quad = \quad \boxed{}$$

3. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Tragen Sie die Ergebnisse in die dazugehörigen Felder ein. Bitte führen Sie Zwischenrechnungen auf eigenem Papier aus, das nicht abgegeben werden soll.

(a) Wenden Sie die Substitutionsformel mit der Substitution $t = x^2 - 1$ an. Sie müssen das substituierte Integral ***nicht*** weiter berechnen.

$$\int_0^1 x \cdot \sin(x^2 - 1)\, dx = \boxed{}$$

(b) Wenden Sie die Formel der partiellen Integration an, indem Sie $(x^2 - 3x)$ ableiten. Sie müssen das neue Integral ***nicht*** weiter berechnen.

$$\int 2(x^2 - 3x) \cdot e^{2x}\, dx = \boxed{ +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

(c) Berechnen Sie die Koeffizienten der folgenden Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2 + 10x + 18}{x(x^2 + 6x + 9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$A = \boxed{} \qquad B = \boxed{} \qquad C = \boxed{}$$

(d) Berechnen Sie eine Stammfunktion der folgenden rationalen Funktion:

$$\int \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{6x-4}{3x^2 - 4x} + \frac{2}{1+x^2}\, dx = \boxed{ +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

4. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(b) Berechnen Sie alle **komplexen** Zahlen z, für die gilt: $z + 13i = 2iz + 4$ und bringen Sie z in die Form $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

5. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 + be^x, & \text{für } x < \pi, \\ a & \text{für } x = \pi, \\ \dfrac{-\sin(x)}{x - \pi}, & \text{für } x > \pi, \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie: $|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$ für $a < b$.
Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz.

6. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Sei $f\colon]-1, \infty[$ mit $f(x) = \ln(1 + x) + x^2$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von f am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie das dazugehörige Restglied in der Langrange-Form.

(c) Zeigen Sie, dass für das Restglied mit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gilt: $|R_2(x)| \leq \dfrac{1}{3}$.

Gesamtpunktzahl: 60 Punkte