1. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Kreuzen Sie jeweils die richtige Lösung an. Pro Teilaufgabe ist genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keine Punkte. Falsch markierte Antworten bitte so ■ kennzeichnen.

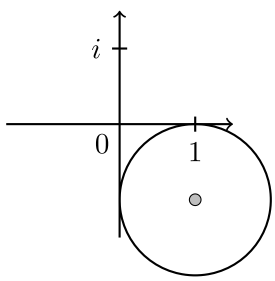
(a) Seien $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x-1)^2$ und $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^x$ zwei Funktionen. Dann gilt für die Komposition $g \circ f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$:

- ☐ $g \circ f$ ist surjektiv.
- ⊠ $g \circ f$ ist injektiv.
- ☐ $g \circ f$ existiert nicht.
- ☐ $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in [0,\infty[$.

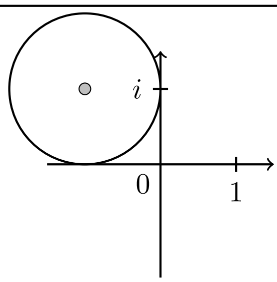
(b) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 0$. Welche der folgenden zusätzlichen Eigenschaften garantiert, dass ein $z \in [0,1]$ existiert mit $f'(z) = 0$?

- ⊠ f ist auf $[0,1]$ differenzierbar.
- ☐ Keine weiteren Bedingungen sind nötig.
- ☐ f ist auf $[0,1]$ integrierbar.
- ☐ f hat in $]0,1[$ eine lokale Extremstelle.

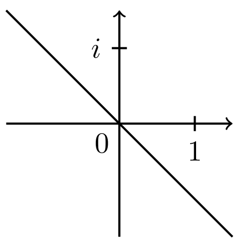
(c) Welche der folgenden Skizzen entspricht der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+i|\}$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



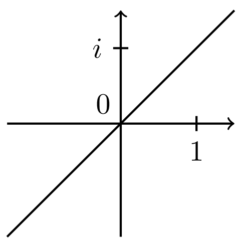
☐



☐



⊠



☐

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$. Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2a$.
- ⊠ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2a + 1$.
- ☐ Keine der obigen Aussagen kann im Allgemeinen getroffen werden.

(e) Sei $f\colon]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = 2|x| + 4$. Dann gilt:

- ☐ Sie besitzt im Intervall $[0,1]$ eine Nullstelle.
- ☒ Sie hat eine lokale Extremstelle bei $x = 0$.
- ☐ Sie ist streng monoton wachsend.
- ☐ Sie ist nicht integrierbar.

(f) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

- ☐ f ist differenzierbar.
- ☒ Falls $\int_a^b f(x)\ dx = 0$, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$.
- ☐ f ist nicht integrierbar.
- ☐ Keine der obigen Aussagen kann im Allgemeinen getroffen werden.

(g) Betrachten Sie die Gleichung $z^6 = (1 + i)^4$. Dann gilt für die Lösungen $z \in \mathbb{C}$:

- ☒ Die Gleichung hat genau 6 verschiedene Lösungen.
- ☐ Es gibt unendlich viele verschiedene Lösungen.
- ☐ Für alle Lösungen z gilt $|z| = 1$.
- ☐ Die Gleichung hat nur reelle Lösungen.

(h) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

- ☐ f nimmt auf $[a, b]$ kein Minimum an.
- ☒ $f([a, b])$ lässt sich als Intervall $[c, d]$ schreiben mit $c, d \in \mathbb{R}$ und $c \leq d$.
- ☐ $f([a, b]) = \emptyset$.
- ☐ f ist auf $[a, b]$ injektiv.

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, ungerade Funktion. Dann gilt:

- ☐ $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ $f'(x) = 0$ für $x = 0$.
- ☐ $f'(x) \neq 0$ für $x = 0$.
- ☒ Keine der obigen Aussagen kann im Allgemeinen getroffen werden.

(j) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, gerade Funktion. Dann gilt:

- ☐ Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) \cdot \cos(x)$ ist ungerade.
- ☒ $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$ für alle $a > 0$.
- ☐ $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$ für alle $a > 0$.
- ☐ f ist nicht integrierbar.

2. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+4n}{3n^3\sqrt{n}+4n^2} = \boxed{0}$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+4n}{3n^3\sqrt{n}+4n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\sqrt{n}\cdot(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{4}{n^2\sqrt{n}})}{n^3\sqrt{n}\cdot(3+\frac{4}{n\sqrt{n}})} = \dfrac{0+0}{3+0} = 0.$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(n)+\sin(n)}{(n+1)^2} = \boxed{0}$$

da $\left|\dfrac{n\sin(x)+\sin(n)}{(n+1)^2}\right| \le \dfrac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

(c) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{16x^2}{\tan(x)} = \boxed{\pi^2}$$

da $\frac{16(\frac{\pi^2}{4})}{\tan(\frac{\pi}{4})} = \pi^2.$

(d) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} = \boxed{2}$$

da $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{-\sin(x)} = 2$ mit L'Hospital.

(e) $$\frac{d}{dx}\ln\left(-\frac{1}{x}\right) = \boxed{-\tfrac{1}{x}}$$

da mit Kettenregel gilt $\frac{d}{dx}\ln(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{-\frac{1}{x}}\cdot(\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x}$

(f) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(x)}{x^2-4}\right) = \boxed{\frac{-\sin(x)(x^2-4)-\cos(x)(2x)}{(x^2-4)^2}}$

(g) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x}\right)\, dx = \boxed{2\sqrt{x} + \ln(|x+1|)} +c,\ c \in \mathbb{R}$

(h) Geben Sie den Ansatz der reellen Partialbruchzerlegung für die

folgende rationale Funktion an:

$$\frac{24x^3+15x+21}{(x^2+1)(x^2-1)} = \boxed{\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}}$$

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ und $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Was ist der Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \ln(a_n)$?

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \boxed{0}$$

da $\lim_{n\to\infty} b_n = \ln(\lim_{n\to\infty} a_n) = \ln(1) = 0.$

(j) Welche kleinste Periode T hat die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(3x) + 2$?

$$T = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

da $\sin(3x + 2\pi) + 2 = \sin(3x) + 2 = \sin(3(x+T)) + 2 \Leftrightarrow 3x + 2\pi = 3x + 3T.$

3. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Tragen Sie die Ergebnisse der folgenden Aufgabe in die dazugehörigen Felder ein. Bitte führen Sie Zwischenrechnungen auf eigenem Papier aus, das nicht abgegeben werden soll.

(a) [3 Punkte] Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int x \ln\left(\frac{1}{2}x\right)\ dx = \boxed{\tfrac{1}{2}x^2 \ln\left(\tfrac{1}{2}x\right) - \tfrac{1}{4}x^2 \qquad +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

da $(\ln(\frac{1}{2}x))' = \frac{1}{x}$ und $\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2$ und somit $\int x \ln\left(\frac{1}{2}x\right)\ dx = \frac{1}{2}x^2 \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \int \frac{1}{2}x\ dx + c.$

Hinweis: Benutzen Sie die Formel der partiellen Integration für das Integral der Form $\int u(x)v'(x)\ dx$ mit $v'(x) = x$ und $u(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2}x\right)$.

(b) [2 Punkte] Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos(2\sqrt{x} - 1)\ dx = \boxed{\sin(2\sqrt{x} - 1) \qquad +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

Mit $t = 2\sqrt{x} - 1$ gilt $dt = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ und ferner $\int \cos(t)\ dt = \sin(t)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $t = 2\sqrt{x} - 1$. Beachten Sie, dass rücksubstituiert werden muss.

(c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Koeffizienten der folgenden Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4x^2 + 2x + 3}{x^3 + x} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x}$$

$A = \boxed{1}$ $B = \boxed{2}$ $C = \boxed{3}$

(d) [2 Punkte] Berechnen Sie eine Stammfunktion der folgenden rationalen Funktion:

$$\int \left(\frac{2x}{1 + x^2} - \frac{4}{(x + 4)^3}\right)\ dx = \boxed{\ln(1 + x^2) + \tfrac{2}{(x+4)^2} \qquad +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

Beachte, dass für $f(x) = 1 + x^2$ gilt: $\int \frac{2x}{1+x^2}\ dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln(f(x)) = \ln(1 + x^2)$.

4. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

(a) Gegeben ist die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$a_n = 5 - \frac{4}{2^n}.$$

(b) Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Ungleichung erfüllen. Geben Sie die Lösungsmenge als Vereinigung von Intervallen an.

$$\frac{x^2+8}{x-1} \geq x - 2.$$

Lösung: [10 Punkte]

(a) [5 Punkte]

Induktionsanfang: $a_0 = 1 = 5 - \frac{4}{1}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein n mit $a_n = 5 - \frac{4}{2^n}$.

Induktionsbehauptung: Dann folgt $a_{n+1} = 5 - \frac{4}{2^{n+1}}$.

Induktionsschritt:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2} \overset{\text{IV}}{=} \frac{5 - \frac{4}{2^n} + 5}{2} = 5 - \frac{4}{2^{n+1}}.$$

(b) [5 Punkte]

Man erhält für $x < 1$:

$x^2 + 8 \leq (x-2)(x-1) \iff 6 \leq -3x \iff x \leq -2$ und $x < 1$

$L_1 =]-\infty, -2]$

und für $x > 1$:

$x^2 + 8 \geq (x-2)(x-1) \iff 6 \geq -3x \iff x \geq -2$ und $x > 1$

$L_2 =]1, \infty[$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist somit $L =]-\infty, -2] \cup]1, \infty[$

5. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion $f : [-3, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 12x - 5$.

(a) Hat die Funktion ein globales Minimum und Maximum?

(b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremalstellen der Funktion und geben Sie jeweils die Art des Extremums an (lokal/global und Maximum/Minimum).

Begründen Sie Ihre Aussagen.

Lösung:

(a) [3 Punkte] Die Funktion ist stetig und auf einem kompakten Intervall definiert , also hat sie ein globales Minimum und ein globales Maximum.

(b) [7 Punkte] Es gilt für die erste Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 12.$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ gilt für $x = -2$ und $x = 2$.
Der Punkt $x = 2$ fällt weg, da er außerhalb des Intervalls liegt.
Wir berechnen nun die Funktionswerte im Punkt $x = -2$ und in den Randpunkten: $f(-3) = 4$, $f(-2) = 11$, $f(1) = -16$.
Aus (a) folgt, dass sich unter diesen Werten das globale Minimum und das globale Maximum befinden muss. Offenbar ist daher $x = -2$ globale Maximalstelle und $x = 1$ globale Minimalstelle.
Außerdem ist -3 eine lokale Minimalstelle (wegen $f'(-3) = 15 > 0$ und -3 ist linker Randpunkt).

6. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = 3x^3 - 1 - 3^x$ im Intervall $[0, 3]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass ein $x \in]-\pi, \pi[$ existiert mit

$$\sin^2(x)f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)f(x).$$

Hinweis. Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \sin^2(x)f(x)$ und verwenden Sie den Mittelwertsatz.

(c) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z = \frac{4+3i}{1+2i}.$$

Lösung:

(a) [4 Punkte]
Wir berechnen die Funktionswerte an den Intervallgrenzen und erhalten $f(0) = 0 - 1 - 1 = -2 < 0$ bzw. $f(3) = 81 - 1 - 27 = 53 > 0$. Die Funktion f ist als Summe stetiger Funktionen wieder stetig im Intervall $[0, 3]$.
Nach dem Zwischenwertsatz nimmt f jeden Wert zwischen -2 und 53 an also auch speziell den Wert 0.

(b) [3 Punkte]
Sei $g(x) = \sin^2(x)f(x)$. Dann gilt $g(-\pi) = g(\pi) = 0$.
Aus dem Mittelwertsatz folgt somit, dass es ein $x \in]-\pi, \pi[$ gibt mit

$$0 = g'(x) = \sin^2(x)f'(x) + 2\cos(x)\sin(x)f(x) \Leftrightarrow \sin^2(x)f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)f(x).$$

(c) [3 Punkte]
Es gilt

$$z = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{1+4} = \frac{1}{5}(4+3i-8i-6i^2) = 2-i.$$

Also $\mathrm{Re}(z) = 2$ und $\mathrm{Im}(z) = -1$.