Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel

vor WiSe 19/20
27. August 2019

"Probeklausur" für Early-Birds vor WiSe 19/20
Erster Teil: „Analysis I für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

---

1. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

   (a) Gegeben sei die Folgen

   $$a_n = \frac{n^3}{3n^4 + \sin(n)}, \quad b_n = 3^{-n}\sin(n)e^n, \quad c_n = \frac{1-n^2}{5+n^2},$$

   Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert. (Hinweis: Hier e die Eulersche Zahl).

   (b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{(2n+4)}$.

Lösung:

(a) [6 Punkte]

   i. $\lim a_n = 0$

   ii. $\lim b_n = \lim \sin(n)(\frac{e}{3})^n = 0$ da $e < 3$.

   iii. $\lim c_n = -1$

(b) [4 Punkte]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{(2n+4)}.$$

2. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{30}{x^2-25}dx,$ (b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}dx,$ (c) $\displaystyle\int_0^1 x\cosh(x)dx.$

Hinweis: Bitte keine gerundeten Ergebnisse. Es gilt $\cosh(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Lösung:

(a) [4 Punkte]
Wir bestimmen das Integral mit Hilfe der Partialbruchzerlegung. Der Ansatz lautet

$$\frac{30}{x^2-25} = \frac{30}{(x-5)(x+5)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5}.$$

Die Zuhaltemethode liefert $A = 3$ und $B = -3$. Somit ist

$$\int \frac{30}{x^2-25}dx = \int \left(\frac{3}{x-5} - \frac{3}{x+5}\right) dx = 3\ln|x-5| - 3\ln|x+5| + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

(b) [3 Punkte]
Wir substituieren $y := \ln x$.

(c) [3 Punkte]
Wir verwenden partielle Integration auf $f(x) = x$ und $g'(x) = \cosh(x)$.

3. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Begründen Sie zunächst, dass $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung f'. Begründen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(c) Ist f' auf ganz $\mathbb{R}$ stetig? Ist f' auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar?

Hinweis: Es darf verwendet werden, dass $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.

Lösung:

(a) [2 Punkte]
Es gilt

$$\left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

und deshalb folgt die Behauptung aus dem “Sandwich”-Prinzip und $\lim_{x\to 0} x = 0$.

(b) [6 Punkte]
Die Funktion f ist für $x \neq 0$ differenzierbar als Komposition und Produkt differenzierbarer Funktionen. Weiter gilt mit (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Also ist f in 0 differenzierbar. Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Da eine differenzierbare Funktion immer auch stetig ist und eben gezeigt wurde, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, muss f auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sein.

(c) [2 Punkte]
Da die Funktion $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x = 0$ nicht stetig ist (siehe Hinweis), ist auch f' in 0 nicht stetig. Aus der Unstetigkeit folgt auch das f' in 0 nicht differenzierbar ist.

4. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Gegeben ist

$$f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4x}{1+x}.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und zeigen Sie, dass im Interval $[0, 2]$ für das Lagrangsche Restglied $|R_2(x)| \leq 4$ gilt.

Lösung: [10 Punkte] Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x}{1+x}, & f(1) &= 2, \\ f'(x) &= \frac{4}{(x+1)^2}, & f'(1) &= 1, \\ f''(x) &= -\frac{8}{(x+1)^3}, & f''(1) &= -1, \end{aligned}$$

Somit folgt

$$T_2(x) = 2 + (x-1) - (x-1)^2/2 = 1 + x - (x-1)^2/2$$

Für das Restglied von T_2 benötigen wir noch die 3. Ableitung von f

$$f'''(x) = \frac{24}{(x+1)^4},$$

Somit ist für ξ zwischen 1 und x und $x \in [0, 2]$:

$$|R_2(x)| = |\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3| = |\frac{24(x-1)^3}{(\xi+1)^4 3!}| \leq |\frac{24 \max_{x\in[0,2]}(x-1)^3}{3! \min_{\xi\in[0,2]}(\xi+1)^4}| \leq \frac{24(2-1)^3}{3! \cdot (0+1)^4} = 4.$$

für $\xi = 0$ und $x = 2$.

5. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Finden Sie heraus, für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x < 0, \\ a\ln(1+x) + b & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 & \text{falls } x > 1, \end{cases}$$

stetig ist. *Hinweis:* Bitte keine gerundeten Ergebnisse.

Lösung: [10 Punkte]

Wir untersuchen zuerst die Stetigkeit.

Wir beobachten zunächst, dass die Teilfunktionen auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig sind (als Komposition stetiger Funktionen).

Es gilt nun, die Schnittstellen zu überprüfen. Mit l'Hospital erhalten wir 1 als linksseitigen Grenzwert von $\sin(x)/x$ in 0. Es muss also gelten $a\ln(1) + b = 0 + b = b = 1$.

Der rechtsseitige Grenzwert von x^2 in 1 ist ebenfalls 1. Es muss also gelten $a\ln(2) + 1 = 1 \Leftrightarrow a\ln(2) = 0$. Damit gilt $a = 0$.

6. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antwort. Nutzen Sie dafür Sätze aus der Vorlesung.

(a) Besitzt $f : [0,3] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \sin(\frac{\pi x}{2}) + 1$ eine Nullstelle?

(b) Sein $f_k : I_k \to \mathbb{R}, k = 1,2,3$, stetig und streng monoton fallend. Entscheiden Sie für jedes k ob f_k ein Maximum besitzt?

$$I_1 = [1,2], \qquad I_2 =]0,1], \qquad I_3 = [1,2[.$$

Lösung:

(a) [4 Punkte] $f(0) = 1, f(3) = -8$ und dann ZWS.

(b) i. [2 Punkte] f_1 hat ein Maximum wegen Satz von Maximum und Minimum denn I_1 kompakt, f_1 stetig ist.

ii. [2 Punkte] f_2 hat kein Maximum wegen Monotonie, I_2 links offen.

iii. [2 Punkte] f_3 hat ein Maximum wegen Monotonie und weil I_3 ist links abgeschlossen.