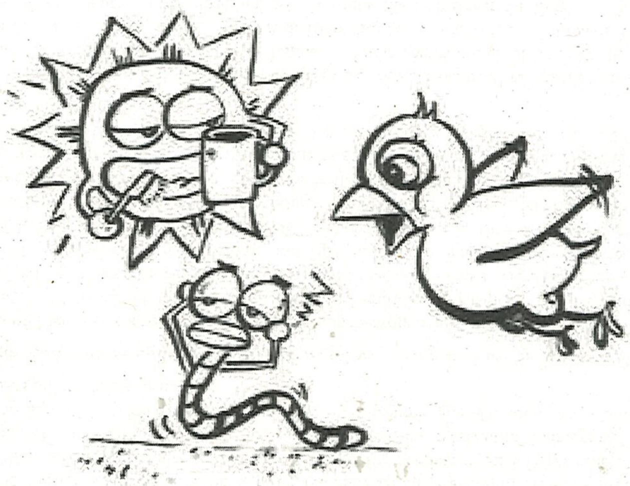
Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Early-Bird vor WS 2019/2020

Technische Universität Berlin

Aufgabensammlung
Analysis I für Ingenieurwissenschaften



Hinweise

Die vorliegenden Seiten beinhalten alte Klausuraufgaben der Veranstaltung *"Analysis I für Ingenieure"* an der Technischen Universität Berlin. Diese sind thematisch geordnet worden, um ein gezieltes Lernen und Vorbereiten auf die Klausur zu unterstützen. Wie Sie damit lernen bleibt letztlich Ihnen vorbehalten, aber wir schlagen für die Early-Bird-Fahrt einen Blockplan zum Lernen vor. Der Grund dafür ist, dass wir möglichst alle relevanten Themen auf der Fahrt abdecken wollen. Überlegen Sie sich also gut, ob Sie auch alle Themen abdecken oder nur schwerpunktmäßig lernen wollen.

Ergo: Sprechen Sie mit Ihrer Lerngruppe ab, *wie*, *wann* und *wo* Sie lernen wollen.

Die Themenfelder des vorgeschlagenen Blockplans bestehen aus mehreren Blöcken. Beispiel: Das Themenfeld "Stetigkeit und Differenzierbarkeit" umfasst die Blöcke 3.1, 3.2 und 3.3. Auf der Early-Bird-Fahrt werden Sie aber in der Regel nicht alle Blöcke aller Themenfelder durcharbeiten! Sprechen Sie sich gegebenenfalls mit Ihrer Lerngruppe ab, welchen Block Sie schaffen wollen und machen Sie dann die übrigen Blöcke beispielsweise in Ihrer Freizeit oder wenn sie mal etwas schneller fertig sind als die anderen. Eine Alternative dazu ist, dass sich die Lerngruppe intern in drei (bzw. weniger) Gruppen spaltet, die einzelnen Subgruppen die jeweiligen Teilblöcke bearbeiten und am Ende (eventuell nur ausgewählte) Aufgaben von den Gruppen vorgestellt werden. Beachten Sie auch, dass der letzte Block *"Wahr oder Falsch?"* nicht im Blockplan vorgesehen ist.

Lesen Sie nicht nur die Lösungen, sondern versuchen Sie ernsthaft Ihre Lösung zu einer Aufgabe so aufzuschreiben, wie Sie es in der Klausur machen würden! Gleichen Sie dann mit der Lösung ab und/oder lassen Sie die Tutoren drüberschauen. Korrigieren Sie danach ihre Lösung so durch, dass sie "richtig aufgeschrieben" ist. Nehmen Sie sich dafür die Zeit!

Bedenken Sie, dass das ruhige "Vor-sich-Herlernen" Ihnen in der Regel keinesfalls die Klausurtauglichkeit sichert. Lösen Sie die Klausuren der letzten Semester (noch) nicht, sodass Sie auch "echte" Klausuren "auf Zeit" rechnen können (diese Aufgabensammlung beinhaltet nur Aufgaben bis einschließlich SoSe 2011 und auch nicht alle Aufgaben der verwendeten Klausuren). Die Erfahrung zeigt, dass viele Leute unter Zeitdruck wesentlich schlechtere Ergebnisse erzielen als in Ruhe bei einem Kaffee und/oder guter Musik.

Ergo: Keine (gute) Vorstellung ohne (General-)Probe!

Wer noch mehr Lerntipps braucht, findet einen ziemlich großen Haufen Literatur zum Thema Lernen. Als Beispiele seien [1], [2] und [3] genannt. Der Austausch mit anderen Studierenden (die Tutoren sind in der Regel alle selbst noch Studierende) ist aber in der Regel auch gewinnbringend.

Viel Spaß und Erfolg auf der *Early-Bird*-Fahrt wünscht das gesamte *Early-Bird*-Team!

Literatur

[1] Haas, P. (2005): *Der Lernfaktor, Methoden für effektiveres Lernen in Schule, Studium und Beruf.* Norderstedt: Books on Demand GmbH

[2] Geuenich, B., Hammelmann, I., Havas, H. (2010): *Das große Buch der Lerntechniken.* München: Compact Verlag

[3] Turtur, C. W. (2008): *Prüfungstrainer Mathematik.* Wiesbaden: Teubner, 2. Auflage

Inhaltsverzeichnis

Block 1.1 - Komplexe Zahlen, (Un-)Gleichungen, Grenzwerte, vollst. Induktion

Aufgabe 1 (Juli SoSe 2011, RT A1) (9 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z welche die Gleichung $z^2 - (2+i)z + 1 + i = 0$ erfüllen. Geben Sie die Lösung in kartesischen Koordinaten an.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z welche $z^3 = -8i$ erfüllen. Geben Sie die Lösung in Polarkoordinaten an und skizzieren Sie die Lösung in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 2 (Februar WiSe 2009/2010, VT A2) (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie $|z|$ für die komplexe Zahl $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^5$.

b) Skizzieren Sie die folgende Punktmenge in der komplexen Zahlenebene:

$$A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - e^{i\frac{\pi}{4}}| \geq 2 \,\}$$

Aufgabe 3 (Februar WiSe 2008/2009, RT A3) (7 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt

$$|x-1| \leq 2x - 1$$

Aufgabe 4 (Juli SoSe 2010, RT A1) (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 4n^3 + n}{3n^3 - n + 2}$, *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1})$, *iii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{5}$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2 x}$.

Aufgabe 5 (Dezember WiSe 2008/2009 (Probeklausur), RT A2) (3 Punkte)

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n^3 - 3n + 1}{n^2} - 3\cos(n)\right)$$

Aufgabe 6 (Oktober SoSe 2010, VT A3) (13 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion!

a) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ definiert durch $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, so gilt:

$$a_n \leq 2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=2}^{n} (k-1) \cdot \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = n\ln(n) - \ln(n!).$$

Block 1.2 - Komplexe Zahlen, (Un-)Gleichungen, Grenzwerte, vollst. Induktion

Aufgabe 1 (Oktober SoSe 2008, RT A1) (7 Punkte)

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$(z+1+i)(z-3-i) = \frac{-40i}{1+3i}$$

Aufgabe 2 (Februar WiSe 2010/2011, RT A1) (10 Punkte)

a) Für welche **reellen** Zahlen x ist die Ungleichung $|x| > 10|x-3|$ erfüllt?

b) Berechnen Sie die **komplexen** Lösungen der Gleichung $z \cdot \overline{z} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{i} = 0$ und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 3 (Oktober SoSe 2010, RT A1) (11 Punkte)

a) Finden Sie alle **komplexen Zahlen** $z \in \mathbb{C}$, die $|z-1| < |z+i|$ erfüllen und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Ebene!

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^3 + 8i = 0$.

Aufgabe 4 (April WiSe 2008/2009, RT A3) (6 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 + \sqrt{n} + \cos(2n+1)}{2n^3 + n\pi + 1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x^2)}$.

Aufgabe 5 (Juli SoSe 2011, VT A3) (12 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die untenstehenden Folgen konvergent sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Folge.

(i) $a_n = e^{-n}\cos(2\pi n), \quad n \in \mathbb{N}$, (ii) $b_n = \cos(\pi n) \cdot \sin(\frac{\pi}{2}n), \quad n \in \mathbb{N}$.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $a_n = (-1)^{n+1}x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Sei $x = \frac{1}{2}$. Welche der folgenden Eigenschaften treffen in diesem Fall auf die Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, zu, und welche nicht? (1) monoton (2) beschränkt (3) konvergent.

(ii) Sei $x = -2$. Welche der folgenden Eigenschaften treffen in diesem Fall auf die Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, zu, und welche nicht? (1) monoton (2) beschränkt (3) konvergent.

Aufgabe 6 (Juli SoSe 2009, VT A2) (8 Punkte)

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Aussage $\sum_{k=1}^{n}(4k-2) = 2n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$.

b) Sei A und x_0 reelle Zahlen mit $A > 0, x_0 > 0$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$. Zeigen Sie, dass falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$.

Block 1.3 - Komplexe Zahlen, (Un-)Gleichungen, Grenzwerte, vollst. Induktion

$\boxed{\text{Aufgabe 1}}$ (Juli SoSe 2009, RT A2) (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 2\sqrt{3} + 2i$.

b) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ dar:

$$z_1 := 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad z_2 := \left(\frac{1+3i}{3-i}\right)^{163}$$

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$ (April WiSe 2008/2009, VT A1) (7 Punkte)

Sei $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ eine Lösung der Gleichung

$$z^4 = a\,.$$

a) Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung in $\mathbb{C}$? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie alle weiteren Lösungen der Gleichung. Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Gleichung in der Gaußschen Zahlenebene.

c) Bestimmen Sie a.

$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$ (April WiSe 2008/2009, RT A1) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung

$$\sqrt{x^2+1} \leq 2x$$

erfüllen.

$\boxed{\text{Aufgabe 4}}$ (April WiSe 2010/2011, RT A2) (11 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x - \sin x}; \qquad (c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\cos n - 2n}{(n+1)^2}.$$

$\boxed{\text{Aufgabe 5}}$ (Juli SoSe 2009, RT A3) (7 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte für $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{6n^4-7n+1}{5-2n^4} \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2n)}{\ln(3n)} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$\boxed{\text{Aufgabe 6}}$ (Februar WiSe 2009/2010, RT A1) (7 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}}\,.$$

Block 2.1 - Funktionsuntersuchungen, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz

Aufgabe 1 (April WiSe 2008/2009, RT A4) (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.

b) Untersuchen Sie f auf lokale und globale Extrema!

Aufgabe 2 (Oktober SoSe 2011, VT A1) (10 Punkte)

Es seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-3t}\cos(3t)$$

und

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-3t}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion h monoton fallend ist.

(b) Zeigen Sie, dass f weder gerade noch ungerade ist, und bestimmen Sie alle Nullstellen von f im Intervall $[0, \pi]$.

(c) Bestimmen Sie das Maximum von f im Intervall $[0, \pi]$.

Aufgabe 3 (April WiSe 2010/2011, RT A1) (8 Punkte)

Geben Sie die Bereiche, auf denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x^2+1)\, e^{-x^2}$ monoton wachsend oder fallend ist, an, und untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Extrema.

Aufgabe 4 (April WiSe 2008/2009, VT A4) (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass es eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt, welche die Gleichung

$$\cos(x\pi) = 2^{x-2}$$

erfüllt.

Hinweis: Legen Sie alle Argumentationsschritte dar.

Aufgabe 5 (Juli SoSe 2009, VT A3) (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^5 + 3x = 3$ genau eine reelle Lösung hat.

Aufgabe 6 (Februar WiSe 2007/2008, VT A5) (7 Punkte)

Beweisen Sie, dass für alle $x > 0$ gilt:

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1).$$

Hinweis: Mittelwertsatz.

Block 2.2 - Funktionsuntersuchungen, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz

Aufgabe 1 (Oktober SoSe 2008, RT A5) (9 Punkte)

Sei $f: [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin(x^2 + \frac{\pi}{4})$.

a) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Minima und Maxima von f.

b) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}^+$ größtmöglich, so dass f auf $[0, a]$ umkehrbar ist.

Aufgabe 2 (Juli SoSe 2008, VT A6) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Stellen x, an denen die Funktion

$$F: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x (1 + (\sin t)^4)\, dt$$

ihre lokalen und globalen Extrema annimmt; die zugehörigen Funktionswerte brauchen nicht berechnet zu werden.

Aufgabe 3 (Oktober SoSe 2009, VT A3) (10 Punkte)

Sei $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft $0 \leq h'(x) \leq h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass h eine monoton wachsende Funktion ist.

b) Zeigen Sie, dass $k(x) = e^{-x} \cdot h(x)$ eine monoton fallende Funktion ist.

c) Zeigen Sie: Gilt $h(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachten Sie die zwei Fälle $x < x_0$ und $x \geq x_0$ separat. Benutzen Sie für den ersten Fall a) und für den zweiten Fall b).

Aufgabe 4 (Oktober SoSe 2010, VT A1) (7 Punkte)

Man zeige, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - x - \frac{e^x}{1+x^2} + \frac{1}{2}$ auf dem Intervall $[-2, 0]$ mindestens eine Nullstelle, ein Maximum und ein Minimum hat.

Aufgabe 5 (Oktober SoSe 2008, VT A2) (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + e^{3x} - 2$.
Zeigen Sie, dass f im angegebenen Intervall genau eine Nullstelle besitzt. Die Nullstelle soll nicht berechnet werden.

Aufgabe 6 (April WiSe 2007/2008, VT A4) (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = (x-2)\ln(x).$$

Zeigen Sie, dass die Ableitung von f eine Nullstelle besitzt in $]1, 2[$, d.h. es existiert ein $\xi \in]1, 2[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Block 2.3 - Funktionsuntersuchungen, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz

Aufgabe 1 (Juli SoSe 2008, RT A4) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{\cos x}.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima von f.

Aufgabe 2 (Juli SoSe 2008, VT A5) (7 Punkte)

Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum folgender Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2}{x+1}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{x/|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (Februar WiSe 2010/2011, VT A2) (11 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 17x^3 - x - \frac{e^x}{1+x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ eine Nullstelle, ein Maximum und ein Minimum besitzt. (Diese müssen nicht unbedingt angegeben werden!)

b) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = e^x(x+2)$ im Innern des Intervalls $[-3, -1]$ keine lokalen Extrema besitzt. Besitzt g globale Extrema auf dem abgeschlossenen Intervall? Wenn ja, wo liegen diese?

Aufgabe 4 (Februar WiSe 2007/2008, VT A1) (6 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass ein $\xi \in [0, \pi]$ existiert mit

$$e^{\xi} \cos \xi = \sin \xi.$$

Aufgabe 5 (Februar WiSe 2009/2010, VT A4) (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \arctan x - \frac{1}{x+1}$ im Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle hat.

Aufgabe 6 (Oktober SoSe 2011, VT A3) (8 Punkte)

(a) Es sei

$$f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sin(x).$$

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass ein $c \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ existiert, welches eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\pi}{4} \cos(x) + \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

ist.

(b) Es sei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[0, 1]$ und differenzierbar auf $]0, 1[$ mit $g(1) > g(0)$. Beweisen Sie, dass ein $c \in]0, 1[$ existiert, so dass $g'(c) > 0$ erfüllt ist.

Block 3.1 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Aufgabe 1 (Februar WiSe 2010/2011, VT A1) (10 Punkte)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & : x < -1 \\ x & : -1 \leq x \leq 0 \\ b + e^x & : x > 0 \end{cases}.$$

Man skizziere den Graphen von f für $a = b = 0$. Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, weisen Sie die Stetigkeit in diesem Falle nach, und skizzieren Sie den Graphen mit diesen Parametern.

Aufgabe 2 (Februar WiSe 2007/2008, RT A3) (8 Punkte)

Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ differenzierbar? Ermitteln Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

Aufgabe 3 (April WiSe 2007/2008, RT A2) (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\sin^2(x)} + c & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist f bei $x_0 = 0$ differenzierbar? Ermitteln Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

Aufgabe 4 (April WiSe 2010/2011, VT A1) (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f
(a) stetig (b) differenzierbar.

Aufgabe 5 (Juli SoSe 2010, VT A5) (10 Punkte)

a) Sei $b \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2, & x < 5 \\ bx - 2, & x \geq 5 \end{cases}$. Bestimmen Sie alle b, sodass f stetig ist.

b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen g differenzierbar ist.

Block 3.2 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Aufgabe 1 (Juli SoSe 2009, VT A1) (5 Punkte)

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2 (Februar WiSe 2009/2010, VT A5) (8 Punkte)

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+1} & \text{für } x \leq 0 \\ \sin(2x) + b\cos(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (Dezember WiSe 2008/2009 (Probeklausur), RT A4) (5 Punkte)

Bestimmen Sie eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Aufgabe 4 (Oktober SoSe 2011, VT A2) (12 Punkte)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[, \\ a & x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie a so, dass f auf ganz $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ stetig ist.

(b) Ist f auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ differenzierbar? Falls ja, berechnen Sie $f'(0)$.

Aufgabe 5 (Juli SoSe 2011, VT A1) (9 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} \sin(x), & x \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[\\ ax + b, & x \in [\frac{\pi}{2}, \infty[. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle Paare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, so dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie alle Paare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, so dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Block 3.3 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Aufgabe 1 (Oktober SoSe 2009, VT A1) (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\} \\ \frac{2}{3} & \text{für } x = 3 \\ -\frac{2}{3} & \text{für } x = -3 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 2 (Oktober SoSe 2008, VT A5) (8 Punkte)

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass folgende Funktion stetig ist:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (Februar WiSe 2008/2009, RT A5) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist f in $x = 0$ differenzierbar? Ermitteln Sie für solches c die Ableitung $f'(x)$ **für alle** $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (April WiSe 2008/2009, VT A2) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\,, & x \in]-\infty, 0[\,, \\ x^2 + 2\,, & x \in [0, +\infty[\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f in $x = 0$ differenzierbar ist. Geben Sie für solche a, b die Ableitung $f'(0)$ von f in $x = 0$ an.

Aufgabe 5 (Februar WiSe 2008/2009, VT A3) (8 Punkte)

Es seien (x_n) und (z_n) die reellen Folgen definiert durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+n\pi}} \quad \text{und} \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi}{2}+2n\pi}}$$

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{x^2}-1)+2} & \text{für } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n)$.

c) Folgern Sie aus b), dass die Funktion f in $x = 0$ unstetig ist.

d) Ist f in $x = 0$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Block 4.1 - Polynome, Taylorpolynome

Aufgabe 1 (Februar WiSe 2008/2009, VT A2) (8 Punkte)

Sei P ein Polynom 5. Grades mit reellen Koeffizienten und habe die doppelte Nullstelle $-i$.

a) Begründen Sie, warum P mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Wie viele **verschiedene** Nullstellen hat P?

b) Die reelle Nullstelle sei nun gegeben durch $x_0 = 1$, d.h. $P(1) = 0$. Geben Sie ein solches Polynom explizit an. Ist P ungerade, d.h. $P(-x) = -P(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 2 (Oktober SoSe 2008, VT A1) (6 Punkte)

Ein Polynom $p(z) \neq 0$ mit reellen Koeffizienten sei gerade, d.h. es gelte $p(z) = p(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiterhin sei $2 - i$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass das Polynom p mindestens vierten Grades ist.

Aufgabe 3 (Februar WiSe 2009/2010, RT A4) (8 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(1-x) - x^2$ das Taylorpolynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
Berechnen Sie damit näherungsweise den Funktionswert $f(\frac{3}{2})$ und zeigen Sie, dass der Fehler kleiner als $\frac{1}{48}$ ist.

Aufgabe 4 (April WiSe 2008/2009, RT A5) (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(1-x)$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 (Juli SoSe 2008, VT A3) (6 Punkte)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 10. Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x-1)^6 + 3$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Geben Sie die kleinste obere Schranke für den Betrag des Restglieds für die Argumente $x \in [0, 2]$ an.

Aufgabe 6 (Februar WiSe 2008/2009, VT A5) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := (x - \frac{3}{2})^9 + \frac{1}{5}(x - \frac{3}{2})^5 + (x - \frac{3}{2})^4 + x - \frac{3}{2}$$

Bestimmen Sie $f(\frac{3}{2})$, $f'(\frac{3}{2})$, $f^{(5)}(\frac{3}{2})$ und $f^{(7)}(\frac{3}{2})$.

Block 4.2 - Polynome, Taylorpolynome

Aufgabe 1 (Oktober SoSe 2011, RT A1) (10 Punkte)

Es sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$P(z) = 2z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 20z - 12 .$$

(a) Berechnen Sie $P(0)$ und $P(1)$, und beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass P mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

(b) Berechnen Sie $P(2i)$.

(c) Berechnen Sie mittels Polynomdivision $P(z) : (z^2 + 4)$.

(d) Berechnen Sie alle Nullstellen von P.

Aufgabe 2 (Oktober SoSe 2009, VT A2) (5 Punkte)

Gegeben sei ein komplexes Polynom $p(z) = z^3 + Az^2 + Bz$ mit reellen Koeffizienten A und B. Weiterhin sei $p(3 - 2i) = 0$, wobei i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ bezeichnet. Wieviele Nullstellen besitzt p? Bestimmen Sie alle Nullstellen von p.

Aufgabe 3 (Juli SoSe 2010, RT A3) (7 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln\sqrt{1+x}$ das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Schätzen Sie den Betrag des Restglieds $|R_2(x)|$ für $x \in [-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}]$ geeignet nach oben ab.

Aufgabe 4 (Oktober SoSe 2008, RT A3) (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^x$.

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion für die k-te Ableitung von f folgende Formel:

$$f^{(k)}(x) = (x^2 + 2kx + k(k-1))e^x$$

b) Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Aufgabe 5}}$ (April WiSe 2010/2011, VT A2) (8 Punkte)

Sei $y(x)$ eine Funktion mit $y(0) = 1$, die die Differentialgleichung $y'(x) - 2xy(x) = 2x^2 - 1$ erfüllt. Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von $y(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$\boxed{\text{Aufgabe 6}}$ (April WiSe 2008/2009, VT A5) (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit $f^{(k)}(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5$, und alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das Restglied $R_5(x)$ des Taylorpolynoms 5-ten Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Folgern Sie aus a), dass f ein Polynom ist.

c) Ausserdem sei $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$. Begründen Sie, warum f ungerade ist, d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und geben Sie ein solches Polynom an.

Block 4.3 - Polynome, Taylorpolynome

$\boxed{\text{Aufgabe 1}}$ (April WiSe 2007/2008, VT A1) (7 Punkte)

Sei p ein gerades Polynom 4. Ordnung, d.h. $p(-x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Es gelte: $p(1) = p(i) = 0$ und $p(0) = 1$. Geben Sie p explizit an.

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$ (Juli SoSe 2008, VT A2) (7 Punkte)

Gegeben sei ein komplexes Polynom

$$p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$

mit reellen Koeffizienten a, b und c. Weiterhin sei $p(i) = 0$, i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Wie viele reelle Nullstellen hat p?

$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$ (Februar WiSe 2008/2009, RT A4) (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

c) Geben Sie das zugehörige Restglied an.

$\boxed{\text{Aufgabe 4}}$ (Oktober SoSe 2010, RT A2) (7 Punkte)

Die Funktion y sei eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - 2xy(x) = 2x^2 - 1$ mit $y(0) = 1$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades von y mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$\boxed{\text{Aufgabe 5}}$ (Oktober SoSe 2009, VT A4) (7 Punkte)

Die stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei ungerade.

a) Zeigen Sie $f(0) = 0$.

b) Bestimmen Sie von der Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x) = x + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

das Taylorpolynom ersten Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$\boxed{\text{Aufgabe 6}}$ (Juli SoSe 2009, VT A4) (5 Punkte)

Das Taylorpolynom 4. Grades einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ist gegeben durch $T_4(x) = 3(x-1)^4 - 5(x-1)^3 + 2(x-1)^2 - 7(x-1) + 6$.

a) Bestimmen Sie $T_2(x)$, das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion f in dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie die Tangentengleichung an den Graphen von f durch den Punkt $(1, f(1))$.

Block 5.1 - Partialbruchzerlegung, Integration

$\boxed{\text{Aufgabe 1}}$ (Februar WiSe 2007/2008, VT A3) (8 Punkte)

Geben Sie den jeweiligen Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen an. Die Koeffizienten sollen nicht berechnet zu werden!

a) $\dfrac{x}{(x+2)(x-4)}$, b) $\dfrac{3x+1}{(x-3)^2}$, c) $\dfrac{x^3-2}{x^4-1}$, d) $\dfrac{x+1}{x}$.

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$ (Oktober SoSe 2008, RT A4) (9 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{6}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$ (Februar WiSe 2010/2011, RT A2) (13 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^{e^2} x^3 \cdot \ln(x)\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

Tipp zu c): Substitution $t = x^2$

$\boxed{\text{Aufgabe 4}}$ (Oktober SoSe 2009, RT A5) (12 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 t\cos(t^2-1)\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int x e^{2x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int x^2(\cos(x^3))^2\sin(x^3)\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$

Aufgabe 5 (Juli SoSe 2011, RT A3) (10 Punkte)

(a) Geben Sie alle Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

an.

(b) Berechnen Sie mittels einer geeigneten Substitution

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2 + 1}\, dx.$$

(c) Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-t} \sin(6t)\, dt.$$

Aufgabe 6 (Februar WiSe 2009/2010, VT A3) (8 Punkte)

Sei $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare positive Funktion. Berechnen Sie

a) $\int f'(x) \cdot \sqrt{f(x)}\, dx$ b) $\int x\, f''(x)\, dx$

Block 5.2 - Partialbruchzerlegung, Integration

Aufgabe 1 (Februar WiSe 2009/2010, RT A3) (8 Punkte)

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{8}{x^3 + x^2 + 3x - 5}.$$

Aufgabe 2 (Juli SoSe 2010, RT A2) (11 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int \frac{2}{(x-2)(x-1)} dx$ *b)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t) dt$ *c)* $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

Aufgabe 3 (Juli SoSe 2009, RT A5) (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int \frac{4}{x^2 - 9}\, dx$ b) $\int x\sqrt{x+3}\, dx$

c) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} 7x \sin(x^2) e^{\cos(x^2)}\, dx$ d) $\int_1^8 \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$

Aufgabe 4 (Juli SoSe 2008, RT A3) (11 Punkte)

Berechnen Sie wenn möglich die folgenden Integrale

a) $\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\, dx$ **b)** $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx$ **c)** $\int_1^e t^3 \ln t\, dt$

Aufgabe 5 (April WiSe 2008/2009, RT A2) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie:

$$\text{(i)} \int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)\,dx.$$

b) Untersuchen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 6 (Februar WiSe 2007/2008, VT A4) (6 Punkte)

Sei $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von

$$\frac{f'(x)f(x)}{2+f^2(x)}.$$

Block 5.3 - Partialbruchzerlegung, Integration

Aufgabe 1 (Juli SoSe 2008, RT A1) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2(x+1)}$$

Aufgabe 2 (Februar WiSe 2008/2009, RT A2) (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\text{a)} \int \frac{5x-1}{(x+1)(x^2-1)}\,dx, \qquad \text{b)} \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx, \qquad \text{c)} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$$

Aufgabe 3 (Februar WiSe 2009/2010, RT A5) (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\,dx \qquad \text{b)} \int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx$$

Aufgabe 4 (Februar WiSe 2007/2008, RT A5) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}.$$

b) Berechnen Sie:

$$\text{i)} \int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{dx} \qquad \text{und} \qquad \text{ii)} \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx}$$

$\boxed{\text{Aufgabe 5}}$ (April WiSe 2007/2008, RT A4) (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{a)} \int_1^2 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$$

$\boxed{\text{Aufgabe 6}}$ (Juli SoSe 2008, VT A4) (8 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Für alle $R > 0$ sei

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 0$$

(a) Begründen Sie, dass f eine Stammfunktion besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass jede Stammfunktion F von f gerade ist, also

$$F(x) = F(-x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Folgt aus den Voraussetzungen, dass f über das Intervall $]-\infty, \infty[$ im uneigentlichen Sinn integrierbar ist, also das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

existiert? Beweis oder Gegenbeispiel!

Block 6 - Wahr oder Falsch?

$\boxed{\text{Aufgabe 1}}$ (April WiSe 2007/2008, VT A2) (9 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, falls die Antwort falsch ist.

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann besitzt f in x_0 ein Extremum.

b) Sei $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f in $]-1,1[$ kein Maximum an.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Folge. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt.

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$ (Juli SoSe 2008, VT A1) (6 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen **immer richtig**?

(a) Seien A, B und C Mengen komplexer Zahlen und sei $A \cap B = \emptyset$ und $B \cap C = \emptyset$. Dann gilt auch $A \cap C = \emptyset$.

(b) Polynome sind unendlich oft differenzierbar.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die Folge $(e^{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die Folge $(\ln a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert < 0.

(f) Differenzierbare Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sind automatisch beschränkt und nehmen auf ihrem Definitionsbereich ihr Infimum und Supremum an.

Beantworten Sie die Fragen nur mit "ja" oder "nein". Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt und für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Minimal können in dieser Aufgabe 0 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 3 (Oktober SoSe 2008, VT A6) (4 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen **immer richtig**?

a) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

c) Ist $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

d) Seien $f, g:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Dann gilt $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} \geq \int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{dx}$.

Beantworten Sie die Fragen nur mit "ja" oder "nein". Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt und für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Minimal können in dieser Aufgabe 0 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 4 (Dezember WiSe 2008/2009 (Probeklausur), VT A4) (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind (ohne Begründung).
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, jede falsche Antwort einen Punkt Abzug. Minimale Punktzahl ist 0.

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion

a) Ist $f(0) = 1$ und f streng monoton fallend, dann hat f eine Nullstelle.

b) Ist f eine ungerade Funktion, dann ist f' gerade.

c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

d) Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Aufgabe 5 (Februar WiSe 2008/2009, VT A4) (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen immer wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, falls die Antwort falsch ist.

a) Es gibt keine reelle Funktion, die durch ein trigonometrisches Polynom mit nur endlich vielen Gliedern *exakt* approximiert wird.

b) Seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit den Eigenschaften $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.

c) Die Gleichung $\cos x = x$ besitzt eine reelle Lösung.

Aufgabe 6 (April WiSe 2008/2009, VT A3) (9 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Die Funktion $f: [-1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{e^{\sin(x^2)}})$, besitzt ein globales Maximum.

b) Es sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{1}{6}\sin(2x)$. Dann gilt:

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos(2x)\,dx = 0$$

c) Es gibt eine ungerade Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, für die das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nicht existiert.

Aufgabe 7 (Juli SoSe 2009, VT A5) (16 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie eine Begründung an oder finden Sie ein Gegenbeispiel, **sonst gibt es keine Punkte!**

a) Ist $h'(x) \in [2,5]$ für alle $x \in [a,b]$, so ist h injektiv auf $]a,b[$.

b) Ist die Funktion f nicht differenzierbar in $x = 1$, so hat f kein Extremum in $x = 1$.

c) Ist $F'(x) = G'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $F(x) = G(x)$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \cos(1)$

e) Ist $\int_{-a}^{a} k(x)dx = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$, so ist $\int_{-\infty}^{\infty} k(x)dx = 0$.

f) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = -1$

g) Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}((-1)^k - \cos(k\pi))$ divergiert.

h) Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=4}^{\infty} \frac{3k-6k^2}{10k+7}$ divergiert.

Aufgabe 8 (Oktober SoSe 2009, VT A5) (10 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie eine Begründung an oder finden Sie ein Gegenbeispiel, **sonst gibt es keine Punkte!**

a) Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt surjektiv, wenn es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = y$.

b) Es sei F eine stetige Funktion mit stetiger Ableitung F'. Dann gilt

$$\int F'(x)\cos(F(x))\,\mathrm{dx} = \sin(F(x)) + c,$$

wobei c eine Konstante ist.

c) Ist die Funktion h stetig, so ist auch $H(x) = \dfrac{x}{1+h^2(x)}$ stetig.

d) Ist $|G|$ eine stetige Funktion, so ist auch G stetig.

e) Ist $g:]-1,1[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so besitzt g ein Maximum oder ein Minimum.

Aufgabe 9 (Oktober SoSe 2010, VT A2) (10 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind falsch, welche sind richtig? *Bei dieser Aufgabe reicht Folgendes aus*: Geben Sie jeweils an, ob die Aussage stimmt (ohne weitere Begründung!), oder geben Sie ein Gegenbeispiel (ohne weitere Begründung!) an, das die Aussage widerlegt.

a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

b) Jede konvergente Folge ist monoton.

c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige andere Folge, so ist die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls Nullfolge.

d) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.

e) Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.

f) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren, dann divergiert auch die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 10 (Februar WiSe 2010/2011, VT A3) (10 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind falsch, welche sind richtig? Geben Sie jeweils an, ob die Aussage stimmt (ohne weitere Begründung!), oder geben Sie ein Gegenbeispiel (ohne weitere Begründung!) an, das die Aussage widerlegt.

a) Sind $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, so ist die Funktion $f \cdot g + 2g$ ebenfalls differenzierbar.

b) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *nicht* differenzierbare Funktion, so ist die Hintereinanderausführung $f \circ g$ auf keinen Fall differenzierbar.

c) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, so hat f an der Stelle x_0 kein lokales Extremum.

d) Bei Folgen gilt: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

e) Jede monotone und beschränkte reelle Folge konvergiert!

f) Jede konvergente Folge ist monoton wachsend oder monoton fallend!

Aufgabe 11 (April WiSe 2010/2011, VT A3) (13 Punkte)

a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind. Geben Sie bei den falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an. Ansonsten muss hier keine weitere Begründung geliefert werden.

   i) Ist $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$, so ist f die Nullfunktion.

   ii) Für integrierbare Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\int f + g \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x + \int g \,\mathrm{d}x$.

   iii) Ist $f: D \to \mathbb{R}$ *nicht* differenzierbar an der Stelle x_0, so besitzt f in x_0 *kein* lokales Extremum.

   iv) Alle differenzierbaren Funktionen sind stetig.

   v) Es gibt beschränkte Folgen, die nicht monoton sind und dennoch konvergent.

b) Begründen Sie, dass jedes Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad 7 mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

c) Geben Sie ein (komplexes) Polynom vom Grad 7 an, das keine reelle Nullstelle besitzt.

Block 7.1 - Fourieranalysis

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Setzen Sie die Funktion

(a) als gerade Funktion,

(b) als ungerade Funktion,

(c) als π-periodische Funktion

auf das Intervall $(-\pi, 0]$ fort. Berechnen Sie jeweils die komplexen Fourierkoeffizienten c_0, c_1 und c_{-1} der 2π-periodischen Fortsetzung.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x| \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi).$$

(a) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten von f.

(b) Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten einer reellen periodischen Funktion gilt:

$$|c_k|^2 = |c_{-k}|^2 = \frac{a_k^2 + b_k^2}{4}$$

für $k \geq 1$.

(c) Bestimmen Sie mit (a) den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Block 7.2 - Fourieranalysis

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x\cos(x) \text{ für } -\pi < x \leq \pi$$

in eine reelle Fourierreihe.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } 0 \leq x < \pi, \\ \pi, & \text{für } \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

in eine Fourierreihe. Bestimmen Sie außerdem ihre komplexen Fourierkoeffizienten.

Block 7.3 - Fourieranalysis

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}$$

unter Verwendung der Fourrierreihe der 2π-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{für } -\pi < x \leq \pi.$$

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x^2, & \text{für } 0 \leq x < \pi, \\ 2\pi - x, & \text{für } \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$