Technische Universität Berlin **2019/20 WiSe**
Fakultät II – Institut für Mathematik 30. September 2019
Dozent: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel

Probeklausur
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften"

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Falls nicht anders gefordert, ist ein vollständiger Lösungsweg anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Bei der Klausur sind 80 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

1. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\rangle_1 = \alpha ac + \beta bd, \ \alpha, \beta > 0$$

a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta > 0$, sodass $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ist.

b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$.

Lösung. a) [4 Punkte] Da $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ sein soll, gilt $\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right] \rangle = \langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \rangle = \alpha + 4\beta = 1$ und $\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \rangle = \alpha - 4\beta = 0$.

Aus der zweiten Gleichung erhält man: $\alpha - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$. Dies eingesetzt in die erste Gleichung ergibt: $\alpha + 4\beta = 4\beta + 4\beta = 8\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{8}$ und schließlich $\alpha = 4\beta = 4\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{8}$ ist $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Orthonormalbasis.

b) [2 Punkte] $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}} \underset{\mathrm{ONB}}{=} \begin{bmatrix} \langle \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right] \rangle \\ \langle \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{10}{8} \\ 1 + \frac{10}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$.

$\square$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |\sin(x)|. \end{aligned}$$

Lösung. Die Funktion f ist gerade, da

$$|\sin(-x)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher gilt $b_k = 0$ für alle $k \geq 1$.

1. Weg: Die Funktion ist π-periodisch. Es gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{\pi}, \end{aligned}$$

sowie für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\sin(t)\frac{1}{2k}\sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\frac{1}{2k}\sin(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi}(0-0) - \frac{4}{\pi}\left[-\cos(t)\frac{1}{4k^2}\cos(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\frac{1}{4k^2}\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\pi k^2} + \frac{1}{4k^2}a_k, \end{aligned}$$

und daher $a_k = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}$. Daher ist die Fourrierreihe von f gegeben durch

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kt).$$

2. Weg: Die Funktion ist 2π-periodisch. Es gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi g(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\cos(t) \right]_0^\pi \\ &= \frac{4}{\pi}, \end{aligned}$$

sowie für $k > 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi g(t) \cos(kt) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin(t) \cos(kt) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sin(t) \frac{1}{k} \sin(kt) \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(t) \frac{1}{k} \sin(kt) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}(0-0) - \frac{2}{\pi} \left[-\cos(t) \frac{1}{k^2} \cos(kt) \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin(t) \frac{1}{k^2} \cos(kt) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2(-(-1)^k - 1)}{\pi k^2} + \frac{1}{k^2} a_k, \end{aligned}$$

und daher $a_k = -\frac{2(1+(-1)^k)}{\pi(k^2-1)}$. ($a_1 = 0$, da $\int\limits_0^\pi \sin(t)\cos(t) \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\pi \frac{1}{2} \sin(2t) \,\mathrm{d}t = 0$.) Daher ist die Fourrierreihe von f gegeben durch

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{k=2}^\infty \frac{2(1+(-1)^k)}{\pi(k^2-1)} \cos(kt) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kt).$$

$\square$

3. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei der folgende zweidimensionale Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$:

$$W = \left\{ax^3 + bx - a : a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

a) Wählen Sie aus der Menge $\mathcal{M} = \{x^3 + 2x - 1, x^2 - 2, 0, -x^3 + 1, 2x - 1\} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ eine Basis $\mathcal{D}$ von W aus. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine Basis von W ist.

b) Begründen Sie kurz, warum $\operatorname{span}\left\{x^2 - 2\right\}$ kein Teilraum von W ist.

Lösung. a) [4 Punkte] Wähle $\mathcal{D} = \left\{x^3 + 2x - 1, -x^3 + 1\right\}$. Es gilt $\mathcal{D} \subset W$, denn beide Polynome sind aus W (für $a = 1, b = 2$ bzw. $a = 1, b = 0$). Zwei linear unabhängige Polynome bilden eine Basis von W, da $\dim(W) = 2$ nach Aufgabenstellung. Die beiden Polynome in $\mathcal{D}$ sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander , d.h. es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $x^3 + 2x - 1 = \alpha(-x^3 + 1)$. Somit ist $\mathcal{D}$ eine Basis von W.

b) [1 Punkt] $\operatorname{span}\left\{x^2 - 2\right\}$ ist kein Teilraum von W, da $x^2 - 2 \notin W$, da Polynome in W keine quadratischen Terme haben.

$\square$

4. Aufgabe (12 Punkte)

a) Gegeben sind die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ mit

$$a_n = \frac{(n-1)^2}{5+n^2}, \qquad b_n = 3^{-n}\sin(n)e^n, \qquad c_n = n + \frac{n}{2}(-1)^n.$$

Untersuchen Sie diese Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert oder begründen Sie ihre Divergenz.

b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{2(n+2)}.$$

Lösung. a)

- [2 Punkte] $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{5+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{5+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-2/n+1/n^2}{5/n^2+1} = 1.$
- [3 Punkte] $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sin(n)(\frac{e}{3})^n$. Da $e < 3$ und $|\sin(n)| \leq 1$ man hat $0 \leq |b_n| \leq (e/3)^n$ und $\lim_{n\to\infty}(e/3)^n = 0$ damit $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
  Die Begründung, dass eine Folge gegen 0 konvergiert, wenn ein Faktor dies tut ist nicht ausreichend, z.B. $3^{-n}3^n$ konvergiert gegen 1 bzw. $3^{-n}4^n = (4/3)^n$ divergiert bestimmt gegen ∞.
- [2 Punkte] Da $c_n \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ ist c_n bestimmt divergent gegen unendlich.
  Es reicht nicht als Begründung, dass ein Teil der Folge divergiert, z.B. $n - n$ ist konstant 0, aber n divergiert bestimmt gegen ∞ und $-n$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$.
  Es reicht auch nicht, wenn aus der bestimmten Divergenz von (n) und $|n| > |\frac{n}{2}(-1)^n|$ die bestimmte Divergenz von (c_n) gefolgert wird. Gegenbeispiel: (d_n) mit $d_n = n - (n - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ konvergiert aber $(n) \to \infty$ und $|n| > |n - \frac{1}{n}|$.

b) [5 Punkte] Induktionsanfang für $n = 1$.

$$\text{L.S.} \quad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{R.S.} \quad \frac{n}{2(n+2)} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Induktionsschritt. Induktionsvoraussetzung (I.V.) : Die Aussage gilt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsbehauptung (I.Beh.): Die Aussage gilt auch für das auf n folgende $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{2(n+3)}.$$

$$\begin{aligned}
\text{L.S der I.Beh.} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{n}{2(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{2(n+2)(n+3)} + \frac{2}{2(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n+1}{2(n+3)} = \text{R.S. der I.Beh}
\end{aligned}$$

$\square$

5. Aufgabe (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{8}{x^2-16}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung. a) [4 Punkte]

Wir bestimmen das Integral mit Hilfe der Partialbruchzerlegung. Der Ansatz lautet

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4}.$$

Die Zuhaltemethode liefert $A = \frac{1}{8}$ und $B = -\frac{1}{8}$. Somit ist

$$\int \frac{8}{x^2-16}dx = \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \ln|x-4| - \ln|x+4| + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

b) [3 Punkte]

Wir substituieren $t := \sqrt{1+x}$. Dann gilt $dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx$ und $2+x = t^2+1$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx &= \int \frac{2t}{(t^2+1)t}dt = \int \frac{2}{1+t^2}dt\\ &= 2\arctan(t) + c = 2\arctan\left(\sqrt{1+x}\right) + c\end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

c) [3 Punkte]

Wir verwenden partielle Integration auf $f(x) = x$ und $g'(x) = \sin(x)$. Dann ist $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos(x)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin(x)dx &= [x(-\cos(x))]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos(x))dx\\ &= -[x\cos(x)]_0^{\pi} + [\sin(x)]_0^{\pi}\\ &= -[\pi\cos(\pi) - 0\cdot\cos(0)] + \sin(\pi) - \sin(0) = \pi.\end{aligned}$$

$\square$

6. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie zunächst, dass $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung f'. Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

c) Ist f' auf $\mathbb{R}$ stetig? Ist f' auf $\mathbb{R}$ differenzierbar?

Hinweis: Es darf verwendet werden, dass $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.

Lösung. a) [2 Punkte]

Es gilt

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

und deshalb folgt die Behauptung aus dem "Sandwich"-Prinzip und $\lim_{x\to 0} x = 0$.

b) [5 Punkte]

Die Funktion f ist für $x \neq 0$ differenzierbar als Komposition und Produkt differenzierbarer Funktionen. Weiter gilt mit (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Also ist f in 0 differenzierbar. Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Da eine differenzierbare Funktion immer auch stetig ist und eben gezeigt wurde, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, muss f auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sein.

c) [2 Punkte]

Da die Funktion $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x = 0$ nicht stetig ist (siehe Hinweis), ist auch f' in 0 nicht stetig. Aus der Unstetigkeit folgt auch das f' in 0 nicht differenzierbar ist.

□

7. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben seien die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $\det(C)$ in Abhängigkeit vom Parameter α mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das homogene lineare Gleichungssystem $C\vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen hat.

c) Bestimmen Sie $\det(-2C^T)$ für $\alpha = \frac{1}{4}$.

Lösung. a) [4 Punkte] $\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{nach 3. Sp.}}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 1 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$\underset{\text{nach 3. Z.}}{=} -2\left(1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$

$= -2(2\alpha^2 - 2 + 2 - 4\alpha)$

$= -2(2\alpha^2 - 4\alpha) = -4\alpha^2 + 8\alpha = \alpha(8 - 4\alpha)$

b) [3 Punkte] $C\vec{x} = \vec{0}$ hat unendlich viele Lösungen, falls die Zeilen/Spalten von C linear abhängig sind, also $\det(C) = 0$ gilt.
$\det(C) = \alpha(8 - 4\alpha) = 0$ gilt genau dann wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2$.
Für alle anderen $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\det(C) \neq 0$ und somit $C\vec{x} = \vec{0}$ für diese eindeutig lösbar.

c) [3 Punkte] $\det(-2C^T) = (-2)^4 \det(C^T) \underset{\det(C^T)=\det(C)}{=} (-2)^4 \det(C) = (-2)^4(\alpha(8 - 4\alpha)) \underset{\alpha=\frac{1}{4}}{=} 16\frac{1}{4}(8-1) = 16\frac{7}{4} = 28$

□

8. Aufgabe (14 Punkte)

Gegeben seien die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

und der Vektor $\vec{w} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B der Matrix B.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und den Eigenraum zum größten Eigenwert.

c) Ist B diagonalisierbar?

d) Zeigen Sie, dass $\vec{w}$ ein Eigenvektor von B ist.

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,'(t) = B\vec{y}(t)$$
$$\vec{y}(0) = 7\vec{w}.$$

Lösung. a) [3 Punkte] $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \cdot I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$\underset{\text{2. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (2-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (2-\lambda)\left[(-2-\lambda)(4-\lambda) + 8\right]$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2$$

b) [5 Punkte] Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen von $p_B(\lambda)$: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2/3} = 2$. Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist:

$$V_{\lambda_{2/3}} = \mathrm{Kern}(B - 2 \cdot I_3) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) \underset{-2\mathrm{III}+\mathrm{I}}{=} \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \underset{-\frac{1}{4}\mathrm{I}}{=}$$

$$\mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{span}\left\{\left[\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$$

c) [3 Punkte] Nach a), b) ist algVFH$(\lambda_{1/2}) = 2 =$dim$(V_{\lambda_{1/2}})$ =geomVFH$(\lambda_{1/2})$, da $\lambda_{1/2}$ doppelte Nullstelle von p_B ist und der zugehörige Eigenraum $V_{\lambda_{1/2}}$ von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. Da für jeden Eigenwert 1 $\leq$geomVFH$\leq$algVFH gilt, ist algVFH$(\lambda_3) = 1$ =geomVFH(λ_3). Also stimmt die algVFH mit der geomVFH für alle Eigenwerte von B überein und B ist somit diagonalisierbar.

d) [1 Punkt] $B\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right] = 2\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = 2\vec{w}$

Also ist $\vec{w}$ Eigenvektor zum Eigenwert 2.

e) [2 Punkte] $7\vec{w}$ ist Eigenvektor von B zum Eigenwert 2, da $B(7\vec{w}) = 7 \cdot (B\vec{w}) \underset{\text{nach d)}}{=} 7 \cdot (2\vec{w}) = 2 \cdot (7\vec{w})$. $\vec{y}(t) = e^{2(t-0)} \cdot 7\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 14e^{2t} \\ 0 \\ 14e^{2t} \end{smallmatrix}\right]$

□

9. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = x \arctan(x).$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von g im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für $x \in [-1, 1]$ für das Restglied $|R_2(x)| \leq \frac{4}{3}$ gilt.

Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= x \arctan(x), & g(0) &= 0, \\ g'(x) &= \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}, & g'(0) &= 0, \\ g''(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}, & g''(0) &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$T_2(x) = x^2.$$

Für das Restglied von T_2 benötigen wir noch die 3. Ableitung von g

$$g'''(x) = -\frac{8x}{(1+x^2)^3}$$

Den Punkt nur geben, falls ersichtlich ist, dass die dritte Ableitung wirklich berechnet worden ist.

und erhalten auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \left|\frac{-8\xi}{(1+\xi^2)^3\, 3!}\, x^3\right| = \left|\frac{8\xi}{(1+\xi^2)^3\, 3!}\right| \underbrace{|x^3|}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{\max_{\xi \in [-1,1]} |8\xi|}{3! \min_{\xi \in [-1,1]} (1+\xi^2)^3} \leq \frac{8}{3!} \cdot 1 = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

wobei ξ zwischen x und 0 liegt.

Keinen Punkt abziehen, falls $\frac{8}{3!}$ nicht vereinfacht wird. Ebenso keinen Punkt abziehen, falls nicht angegeben wird, in welchem Bereich ξ liegt.

$\square$

Punkte	Note
0–39	5,0
40–44	4,0
45–48	3,7
49–52	3,3
53–56	3,0
57–60	2,7
61–64	2,3
65–68	2,0
69–72	1,7
73–76	1,3
77–80	1,0