Lösung zur Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} -x \cdot e^x & , \ x \leq 0 \\ mx + n & , \ x > 0 \end{cases}$$

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} -x \cdot e^x \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} \\ &\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{e^{-x}} \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}} \\ &= 0 \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}} \end{aligned}$$

b) f ist zunächst als Zusammensetzung stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$. Es gilt weiter $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$ (Rechnung + Ergebnis)

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} f(x) &= \lim_{x \searrow 0} (mx + n) &= n \\ f(0) &= -0 \cdot e^0 &= 0 \\ \lim_{x \nearrow 0} f(x) &= \lim_{x \nearrow 0} (-x \cdot e^x) &= 0 \end{aligned}$$

Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, falls $n = 0$ und $m \in \mathbb{R}$ beliebig $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$. Den Punkt gibt es nicht, wenn $m \in \mathbb{R}$ weggelassen wird bzw. nicht deutlich wird, dass das auch Teil der Antwort ist.

c) Voraussetzung für Differenzierbarkeit überall ist Stetigkeit überall, also betrachten wir gleich $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} -x \cdot e^x & , \ x \leq 0 \\ mx & , \ x > 0 \end{cases}$$

f ist als Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$. Es gilt $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$ (Rechnung + Ergebnis)

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \searrow 0} \tfrac{mx}{x} &= \lim_{x \searrow 0} m &= m \\ \lim_{x \nearrow 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \nearrow 0} \tfrac{-x \cdot e^x}{x} &= \lim_{x \nearrow 0} -e^x &= -1 \end{aligned}$$

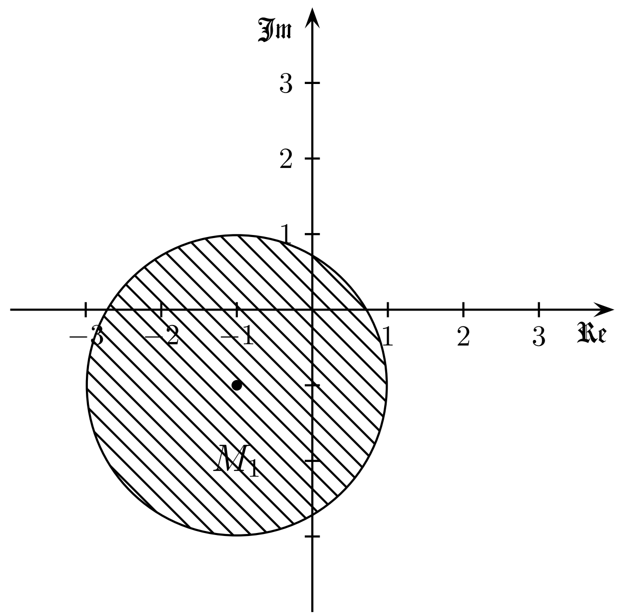
Also ist f genau dann überall differenzierbar, wenn $n = 0$ und $m = -1$ $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$.

Lösung zur Aufgabe 2:

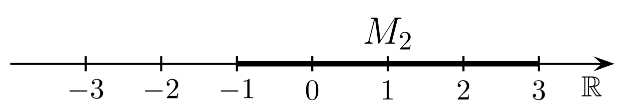
Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = -1 - i \quad \text{und} \quad z_2 = e^{\frac{1}{6}\pi i}.$$

a) In M_1 sind alle $z \in \mathbb{C}$, die von $z_1 = -1 - i$ höchstens den Abstand 2 haben (alternative Begründungen sind auch ok) $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$. Damit also $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$



Die Menge M_2 sind alle $x \in \mathbb{R}$, die von $1 = |z_2|$ den Abstand höchstens 2 haben (andere Begründungen, insbesondere das Auflösen des Betrages, sind auch ok) $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$. Damit also $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$



b) Aus der Faktorisierung ist direkt eine Lösung

$$z = -2e^{\frac{1}{6}\pi i}$$

abzulesen. Diese lautet in kartesischer Form

$$z = -2\Big(\cos(\frac{1}{6}\pi) + i\sin(\frac{1}{6}\pi)\Big) = -2 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} - i \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Eine zweite Lösung ergibt sich aus $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$ (Eulerform + Rechnung/Ergebnis)

$$z_1 - z^5 = 0 \Leftrightarrow z^5 = -1 - i \Leftrightarrow z^5 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{5}{4}\pi} \Rightarrow z = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi} = \sqrt[10]{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$

c) Es gilt $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$ (Rechnung + 2π-Periodizität)

$$z_2 = \sqrt[181]{z_2} \Rightarrow z_2^{181} = z_2 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{6}\pi i}\right)^{181} = e^{\frac{1}{6}\pi i} \Leftrightarrow e^{30\pi i + \frac{1}{6}\pi i} = e^{\frac{1}{6}\pi i} \overset{e^{ix}\ 2\pi\text{-periodisch}}{\Leftrightarrow} e^{\frac{1}{6}\pi i} = e^{\frac{1}{6}\pi i}$$

Lösung zur Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sin(2x)$$

a) f ist eine ungerade Funktion, da für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \sin(-2x) \overset{\sin\ \text{ungerade}}{=} -\sin(2x) = -f(x) \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Somit gilt für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = 0 \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Alternativ:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\cos(2x)\Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{2}\cos(-a) + \frac{1}{2}\cos(a) \overset{\cos\ \text{gerade}}{=} -\frac{1}{2}\cos(a) + \frac{1}{2}\cos(a) = 0$$

b) Es gilt

$$f'(x) = 2\cos(2x) \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

und mit den Additionstheoremen bzw. Doppelwinkelsätzen und dem trig. Pythagoras $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$ gilt

$$2\cos(2x) = 2\cdot\Big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\Big) = 2\cdot\Big(\cos^2(x) - \big(1 - \cos^2(x)\big)\Big) = 4\cos^2(x) - 2 \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Alternativ kann auch mit dem Konstanzkriterium der Nachweis der Gleichheit erbracht werden.

c) Es gilt mit der Ableitung aus (b):

$$\begin{aligned} T_1(x) &= f(\tfrac{\pi}{2}) + f'(\tfrac{\pi}{2}) \cdot (x - \tfrac{\pi}{2}) \\ &= -2(x - \tfrac{\pi}{2}) = -2x + \pi \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}} \end{aligned}$$

Da

$$T_1(0) = \pi > 0 > -\pi = T_1(\pi)$$

und T_1 als Polynom stetig ist $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$, hat T_1 nach Zwischenwertsatz $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$ mind. eine Nullstelle x_0. Da

$$T_1'(x) = -2,$$

ist T auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton fallend $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$, kann also nur eine einzige Nullstelle besitzen $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$.

Lösung zur Aufgabe 4:

Gegeben ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta + 2 \end{bmatrix}$$

a) Das LGS in EKM lautet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Damit lautet die Lösung des LGS

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ s \in \mathbb{R} \right\} \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

b) **Fall 1:** Es gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq -2$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta + 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2+\beta}\cdot \mathrm{II}]{\frac{1}{\alpha}\cdot \mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I} - \frac{1}{\alpha}\cdot \mathrm{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Fall 2: Es gilt für $\alpha = 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \neq -2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta + 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2+\beta}\cdot \mathrm{II}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} - \mathrm{I}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Fall 3: Es gilt für $\beta = -2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\alpha}\cdot \mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Fall 4: Für $\alpha = 0$ und $\beta = -2$ ist die Matrix sofort in NZSF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Lösung zur Aufgabe 5:

Gegeben seien mit $\mathcal{B} = \Big\{x^2+2,\ -3x+2,\ -x^2+x-3\Big\}$ und $\mathcal{C} = \Big\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\Big\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ sowie die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit

$$L(x^2+2) = 2x^2+4, \qquad L(-3x+2) = 0, \qquad L(-x^2+x-3) = 2x^2-2x+6$$

a) Es gilt

$$\begin{aligned} L(x^2+6x-2) &= L\Big(1\cdot(x^2+2) - 2\cdot(-3x+2)\Big) \\ &\overset{L \text{ linear}}{=} 1\cdot L(x^2+2) - 2\cdot L(-3x+2) \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}} \\ &= 2x^2+4-2\cdot 0 \\ &= 2x^2+4 \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}} \end{aligned}$$

b) Es gilt wegen $L(-3x+2) = 0$, dass $\operatorname{Kern}(L) \neq \{\vec{0}\}$ $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$ und somit ist L nicht injektiv, also erst recht nicht bijektiv $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$.

c) Es gilt das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "K_{\mathcal{C}}"] & \\ \mathbb{R}^3 \arrow[rr, "S"'] & & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & p_2(x) \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "K_{\mathcal{C}}"] & \\ \vec{v}_{\mathcal{B}} \arrow[rr, "S"'] & & \vec{e}_2 \end{tikzcd}$$

Laut Diagramm gilt also

$$p_2(x) = K_{\mathcal{C}}^{-1}\Big(\vec{e}_2\Big) = (K_{\mathcal{B}}^{-1} \circ S^{-1})\Big(\vec{e}_2\Big) = K_{\mathcal{B}}^{-1}\Big(S^{-1}\cdot\vec{e}_2\Big)$$

Die inverse Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}^{-1}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{B}}^{-1} :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], \qquad \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} &\mapsto e\cdot(x^2+2) + f\cdot(-3x+2) + g\cdot(-x^2+x-3) \\ &= (e-g)x^2 + (-3f+g)x + 2e + 2f - 3g \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}} \end{aligned}$$

Die inverse Transformationsmatrix S^{-1} mit Gauß:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}]{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{viel tauschen}]{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Also

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\textbf{2 Punkte}} \text{ (Rechnung + Ergebnis)}$$

Letztlich also

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= K_{\mathcal{B}}^{-1}\Big(S^{-1} \cdot \vec{e}_2\Big) \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}} \\
&= K_{\mathcal{B}}^{-1}\Big(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big) \\
&= K_{\mathcal{B}}^{-1}\Big(\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Big) \\
&= (\frac{1}{3} - \frac{1}{3})x^2 + (-3 \cdot 0 + \frac{1}{3})x + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}
\end{aligned}$$

d) Die darstellende Matrix lässt sich mittels dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_{\leq 2}[x] \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "L_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

bestimmen. Wir berechnen Sie bspw. spaltenweise $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$.
Es gilt mit $\mathcal{B} = \Big\{x^2 + 2,\ -3x + 2,\ -x^2 + x - 3\Big\} = \Big\{b_1(x),\ b_2(x),\ b_3(x)\Big\}$ $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_1 &= K_{\mathcal{B}}\Big(L\big(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_1)\big)\Big) \\
&= K_{\mathcal{B}}\Big(L(b_1(x))\Big) \\
&= K_{\mathcal{B}}\Big(L(x^2 + 2)\Big) \\
&= K_{\mathcal{B}}\Big(2 \cdot (x^2 + 2)\Big) \\
&= 2 \cdot K_{\mathcal{B}}\Big(x^2 + 2\Big) \\
&= 2 \cdot \vec{e}_1
\end{aligned}$$

Analog ergeben sich $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

$$L_{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{und} \quad L_{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_3 = -2 \cdot \vec{e}_3$$

Also $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Alternativ die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$. Es gilt der Ansatz

$$K_{\mathcal{B}}\Big(ax^2+bx+c\Big) = \lambda_1 \cdot (x^2+2) + \lambda_2 \cdot (-3x+2) + \lambda_3 \cdot (-x^2+x-3) = (\lambda_1 - \lambda_3)x^2 + (-3\lambda_2 + \lambda_3)x + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3$$

Also als EKM

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & -3 & 1 & b \\ 2 & 2 & -3 & c \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-2\cdot\text{I}]{-\frac{1}{3}\cdot\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}b \\ 0 & 2 & -1 & c-2a \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & c-2a+\frac{2}{3}b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3\cdot\text{III}]{\text{II}-\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -b-c+2a \\ 0 & 0 & 1 & -3c+6a-2b \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I}+\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3c+7a-2b \\ 0 & 1 & 0 & -b-c+2a \\ 0 & 0 & 1 & -3c+6a-2b \end{array}\right]$$

e) Die Eigenwerte von L kann man geschickt durch die abgebildeten Vektoren bestimmen. Es gilt $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$

$$\begin{aligned} L(x^2+2) &= 2x^2+4 &&= 2\cdot(x^2+2) \\ L(-3x+2) &= 0 &&= 0\cdot(-3x+2) \\ L(-x^2+x-3) &= 2x^2-2x+6 &&= -2\cdot(-x^2+x-3) \end{aligned}$$

Damit lauten die Eigenwerte von L

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -2 \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Es muss nicht begründet werden, dass es die einzigen Eigenwerte sind.

Alternativ können die Eigenwerte mittels der darstellenden Matrix $L_{\mathcal{B}}$ bestimmt werden.

Lösung zur Aufgabe 6:

Geben Sie im Folgenden ein Beispiel an oder begründen Sie, warum es so etwas nicht geben kann.

a) Solch eine lineare Abbildung kann es nicht geben, da $\dim \operatorname{Kern}(f) = 0$ und nach Dimensionssatz müsste $\dim \operatorname{Bild}(f) = 2$ sein $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$.

b) Solch eine Matrix gibt es. Bspw.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die linear unabhängigen Spalten bilden eine Basis des Bildes von A, also

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Bild}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Alternativ kann man über den Rang argumentieren, da A schon in NZSF ist. Da aber

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \operatorname{Bild}(A)$ $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$.

c) Solch eine Matrix kann es nicht geben, da orthogonale Matrizen nur die Eigenwerte 1 und -1 haben können $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$.

d) Solch eine Matrix gibt es, bspw.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = (2 - \lambda) \cdot \lambda$$

und damit die Eigenwerte 0 und 2 und das Bild ist der Spann der Spalten, also

$$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$\boxed{\textbf{2 Punkte}}$