Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 11
Florian Goßler, Olivier Sète 23. September 2011

"Probeklausur" für Early-Birds
Early-Bird vor WS 11/12

Name: .... Vorname: ....

Tutor: ....

Studiengang: ....

Neben zwei handbeschriebenen DIN-A4 Blättern (einmal für LinA, einmal für Ana) mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.
Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf DIN-A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden**. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und /oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. "Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript" gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz (falls vorhanden) muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Teil I - Analysis

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} -x \cdot e^x & ,\ x \leq 0 \\ mx + n & ,\ x > 0 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Bestimmen Sie alle $m, n \in \mathbb{R}$ so, dass f überall stetig ist.

c) Für welche $m, n \in \mathbb{R}$ ist f überall differenzierbar?

2. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = -1 - i \quad \text{und} \quad z_2 = e^{\frac{1}{6}\pi i}.$$

a) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - z_1| \leq 2 \right\} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \big|x - |z_2|\big| \leq 2 \right\}$$

b) Berechnen Sie mindestens *zwei verschiedene* Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z_1 - z^5)(z + 2z_2) = 0$$

und geben Sie diese in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

c) Zeigen Sie, dass z_2 eine 181. Wurzel von sich selbst ist.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sin(2x)$$

a) Begründen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = 0$$

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f und zeigen Sie, dass

$$f'(x) = 4\cos^2(x) - 2$$

c) Bilden Sie das Taylorpolynom T_1 von f zur Entwicklungsstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass T_1 *genau eine* Nullstelle hat.

Teil II - Lineare Algebra

4. Aufgabe
6 Punkte

Gegeben ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta + 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie für $\alpha = 2$ und $\beta = -2$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die NZSF der Matrix A.

5. Aufgabe
16 Punkte

Gegeben seien mit $\mathcal{B} = \left\{x^2+2,\ -3x+2,\ -x^2+x-3\right\}$ und $\mathcal{C} = \left\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\right\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ sowie die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit

$$L(x^2+2) = 2x^2+4, \qquad L(-3x+2) = 0, \qquad L(-x^2+x-3) = 2x^2-2x+6$$

a) Bestimmen Sie $L(x^2+6x-2)$.

b) Ist L bijektiv?

c) Es sei

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

die Basisübergangsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.
Bestimmen Sie $p_2(x)$ (in der Basis $\mathcal{C}$).

d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L.

e) Bestimmen Sie die Eigenwerte von L.

6. Aufgabe
8 Punkte

Geben Sie im Folgenden ein Beispiel an oder begründen Sie, warum es so etwas nicht geben kann.

a) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\dim \operatorname{Bild}(f) = 1$ und f injektiv.

b) Eine (3×3)-Matrix A mit $\dim \operatorname{Bild}(A) = 2$, für die

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

nicht lösbar ist.

c) Eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $g(Q, -2) = 1$.

d) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ und den Eigenwerten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$.