Technische Universität Berlin **SoSe 2019**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: A. Gündel-vom Hofe, M. Heida, R. Schneider

Probeklausur 1
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren werden nicht gewertet.
- **In den Aufgaben 1–3 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie keine Rechnungen an.**
- **In den Aufgaben 4–9 ist immer ein vollständiger Lösungsweg anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).**

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Bei der Klausur sind 80 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

1. Aufgabe (11 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) [2 Punkte] Es seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie AB.

$AB =$

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Determinante von $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

$\det(A) =$

c) [2 Punkte] Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{5,5}$ hänge von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ ab, und habe die Determinante $\det(A) = a(2-a)^2$. Für welche a ist A nicht invertierbar?

A ist nicht invertierbar für $a =$

d) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des reellen linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{L} =$

e) [3 Punkte] $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ hat die Zeilenstufenform $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Bestimmen Sie eine Basis von Bild(A) und die Dimension von Kern(A).

Basis von Bild(A):	dim(Kern(A)) =

2. Aufgabe (7 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) [2 Punkte] Sei $A = \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie dieses in Linearfaktorzerlegung an.

Charakteristisches Polynom von A in Linearfaktorzerlegung:

b) [2 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(z) = -(z-3)(z^2-3z)$ gegeben. Bestimmen Sie die Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten von A.

Eigenwerte mit algebraischen Vielfachheiten:

c) [3 Punkte] Die Matrix $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ hat die Eigenwerte 2, -2 und 5.

Bestimmen Sie den Eigenraum von B zum Eigenwert 2, und die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 5.

Eigenraum zum Eigenwert 2:

geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 5:

3. Aufgabe (6 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

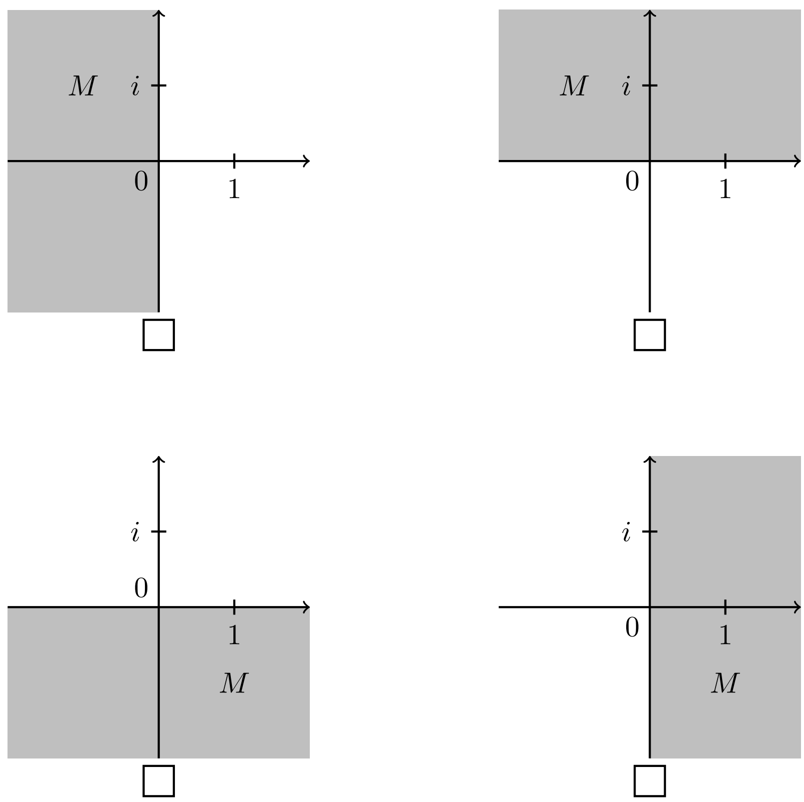
a) [2 Punkte] Schreiben Sie $z = 1 - i$ in Eulerdarstellung.

Eulerdarstellung:

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \dfrac{1}{1-i}$.

$\mathrm{Re}(z) =$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Im}(z) =$

c) [2 Punkte] Welche der Skizzen beschreibt die Menge M aller $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(iz) \leq 0$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



Bitte bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben auf separaten Blättern.

4. Aufgabe (7 Punkte)

a) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^5+3n^2+7}{7n^5+n^3+n}$.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv gegeben durch $a_0 = 2$ und $a_{n+1} = \dfrac{2+a_n}{3}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = 1 + \dfrac{1}{3^n}$.

5. Aufgabe (12 Punkte)
Berechnen Sie die Integrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2 e^{(x^3)}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (x-1)\sin(x)\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx$. *Hinweis:* Substitution.

6. Aufgabe (10 Punkte)
Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und die Nullstellen von f.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

7. Aufgabe (9 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{falls } x \le 2, \\ 2x-3, & \text{falls } x > 2. \end{cases}$

a) Zeigen Sie mit dem Differenzialquotienten, dass f in $x = 2$ differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom n-ten Grades von f am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die zugehörige Taylorreihe gegen f?

8. Aufgabe (9 Punkte)

a) Zeigen Sie: $f : [3,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, ist streng monoton fallend.

b) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{x^2-1}$.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

d) Berechnen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

Bitte wenden!

9. Aufgabe (9 Punkte)

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ a \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^3$?

b) Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ der Polynome höchstens zweiten Grades mit der Basis $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ mit $p_1(x) = x^2 + x + 1$, $p_2(x) = x + 1$, $p_3(x) = 1$, und die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \quad p(x) \mapsto xp'(x).$$

Berechnen Sie die darstellende Matrix $f_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von f bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Gesamtpunktzahl: 80 Punkte