TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2000/2001
Fachbereich 3 - Mathematik
Seiler / Rambau

Prüfungs-/Übungsschein-Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure/E-Techniker

Name: ....

Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett beim HM-Service-Center (Raum MA 708).

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. im WWW[1] (geschützt durch ein Passwort).

....
Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit mindestens 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 5 von 20 Punkten erreicht werden. Fragen können während der Klausur leider nicht beantwortet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an und begründen Sie Ihren Lösungsweg. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

[1] `http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/ING/klausuren.html`

Achtung: Notation des Gaußalgorithmus

Notieren Sie jeden Gaußalgorithmus in Matrizenschreibweise und dokumentieren Sie jeden einzelnen Schritt wie folgt:

Hier wird auf die 3. Zeile das (-3)-fache der 1. Zeile addiert.

Ansonsten droht drastischer Punktabzug!

Rechenaufgaben

1. Aufgabe (2 Punkte)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array} \quad .$$

a) Bringen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußalgorithmus auf Zeilenstufenform und lesen Sie daraus den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ab. Beachten Sie die Hinweise zur Notation des Gaußalgorithmus!

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des zugehörigen **homogenen** Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \vec{0}, \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3) \qquad .$$

c) Ist der Vector $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ mit $x_1 = x_2 = 1, \ x_3 = 0$ eine Lösung des **inhomogenen** Gleichungssystems?

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie (wieder) die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A.

b) Zeigen Sie, daß Null ein Eigenwert von A ist.

c) Betrachten Sie A als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ und berechnen Sie den Eigenraum von A zum Eigenwert Null.

d) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t), \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{y}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Hinweis: Beachten Sie, daß $\vec{y}(0)$ ein Eigenvektor von A ist.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} A\colon \quad \mathbb{M}(2\times 2, \mathbb{R}) \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{M}(2\times 2, \mathbb{R}), \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad &\longmapsto \quad \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & a-b \\ \frac{c+d}{2} & c-d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bzgl. der Basis $\widetilde{\mathcal{B}} = \{b_1, ..., b_4\}$, gegeben durch

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ b_2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ b_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ b_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe (3 Punkte)

Betrachten Sie die beiden Vektoren

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad \left(\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3\right) \quad .$$

a) Zeigen Sie, daß $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ orthonormal (d.h. orthogonal und normiert) sind.

b) Ergänzen Sie $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

6. Aufgabe (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

wobei $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2000/2001
Fachbereich 3 - Mathematik
Seiler / Rambau

Prüfungs/-Übungsschein-Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure/E-Techniker

Name: ....

Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett beim HM-Service-Center (Raum MA 708).

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. im WWW[2] (geschützt durch ein Passwort).

....
Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit mindestens 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 5 von 20 Punkten erreicht werden. Fragen können während der Klausur leider nicht beantwortet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

1	2	3	4	5	$\sum$

[2] `http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/ING/klausuren.html`

Verständnisaufgaben

1. Aufgabe (2 Punkte)

Betrachten Sie den Vektorraum der (2×2)-Matrizen

$$\mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) | \, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

und darin die Teilmengen

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) | \, a, b, d \in \mathbb{R}\}, \\
M_2 &:= \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d^3 \end{smallmatrix}\right) \big| \, a, b, d \in \mathbb{R}\}, \\
M_3 &:= \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) | \, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ a + d = 0\}, \\
M_4 &:= \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) | \, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ \det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 0\} \quad .
\end{aligned}$$

Entscheiden Sie bitte, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. (Zutreffendes bitte ankreuzen, ohne Angabe einer Begründung.)

	wahr	falsch
M_1 ist Untervektorraum des $\mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.	◯	◯
M_2 ist Untervektorraum des $\mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.	◯	◯
M_3 ist Untervektorraum des $\mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.	◯	◯
M_4 ist Untervektorraum des $\mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.	◯	◯

Hinweis: M_2 ist etwas knifflig.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2+2b & 3 \\ 1 & 2 & 3+b \end{pmatrix}$.

1. Für welche $b \in \mathbb{R}$ existiert die inverse Matrix A^{-1}?
   Begründen Sie die Antwort auf zwei Weisen (ohne A^{-1} auszurechnen) unter Verwendung der Begriffe
   (i) Determinante von A,
   (ii) Rang der Matrix A.
2. Entscheiden Sie (ohne eine Begründung anzugeben), ob für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(i) für $b = 0$	☐ lösbar ☐ eindeutig lösbar ☐ nicht lösbar	ist.
(ii) für $b = 1$	☐ lösbar ☐ eindeutig lösbar ☐ nicht lösbar	ist.

3. Für welche $b \in \mathbb{R}$ sind die Spaltenvektoren von A linear unabhängig?

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \neq 0$, ein Vektor. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{x} \times \vec{a} \quad . \end{aligned}$$

(i) Verifizieren Sie, daß L bzgl. der Standardbasis die Darstellungsmatrix

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.

(ii) Bestimmen Sie die Terme $\langle \vec{a}, L(\vec{x}) \rangle$ und $\langle \vec{x}, L(\vec{x}) \rangle$.

(iii) Besitzt die Gleichung $A_L \vec{x} = \vec{a}$ eine Lösung?

(iv) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von L.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t), \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Anfangswert

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{y}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, daß $\vec{y}(0)$ ein Eigenvektor von A ist.

(ii) Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems?

(iii) Berechnen Sie den Propagator

$$P(t) = e^{tA}$$

und verwenden Sie dabei, daß gilt

$$\begin{aligned} A &= E + D, \\ D^2 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

5. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad \left(\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2\right)$$

und einen Vektor $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ der Länge eins, d.h. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} P\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \vec{x} &\longmapsto \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} \end{aligned}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $P^2 = P$
(ii) $\vec{a}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert eins.
(iii) Der Kern von P hat die Dimension eins.
(iv) Das Bild von P hat die Dimension eins.

Hinweis: Verwenden Sie für (iii) und (iv), daß $\{\vec{a}, \vec{a}^\perp\}$ mit $\vec{a}^\perp = \left(\begin{smallmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{smallmatrix}\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.