TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2000/2001
Fachbereich 3 - Mathematik
Seiler / Rambau

Prüfungs-/Übungsschein-Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure/E-Techniker

Name: ....

Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett beim HM-Service-Center (Raum MA 708).

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. im WWW[1] (geschützt durch ein Passwort).

....
Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit mindestens 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 5 von 20 Punkten erreicht werden. Fragen können während der Klausur leider nicht beantwortet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

1	2	3	4	5	$\sum$

[1] http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/ING/klausuren.html

Rechenaufgaben

1. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(in A und B sind zwei Spaltenvektoren vertauscht).

(i) Berechnen Sie die Determinanten $\det A,\ \det B,\ \det C,\ \det(A \cdot B)$ und $\det C^T$.

(ii) Berechnen Sie die Matrix A^{-1}.

(iii) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(iv) Zeigen Sie, daß A den Eigenwert eins hat und geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor an.

(v) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t) \ , \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

(Tip: Verwenden Sie das Resultat aus (iv).)

2. Aufgabe (2 Punkte)

Stellen Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der 4 Matrizen

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dar.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Das folgende Gleichungssystem hat genau eine Lösung. Berechnen Sie diese mit Hilfe des Gaußalgorithmus!

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 \quad &= 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

4. Aufgabe (2 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen korrekt sind und geben Sie eine Begründung an:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

(iii) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ sind i und $-i$.

5. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2}(t) + 2\frac{dy}{dt}(t) + 2y(t) &= 0\ , \\ y(0) &= 1\ , \\ \frac{dy}{dt}(0) &= -1\ . \end{aligned}$$

Wie lautet die Lösung?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2000/2001
Fachbereich 3 - Mathematik
Seiler / Rambau

Prüfungs/-Übungsschein-Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure/E-Techniker

Name: ....

Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett beim HM-Service-Center (Raum MA 708).

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. im WWW[2] (geschützt durch ein Passwort).

....
Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit mindestens 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 5 von 20 Punkten erreicht werden. Fragen können während der Klausur leider nicht beantwortet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

1	2	3	4	$\sum$

[2] `http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/ING/klausuren.html`

Verständnisaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

1. Für welche $b \in \mathbb{R}$ existiert die inverse Matrix A^{-1}?
   Begründen Sie die Antwort auf zwei Weisen (ohne A^{-1} auszurechnen) unter Verwendung der Begriffe

   (i) Determinante von A,

   (ii) Rang der Matrix A.

2. Entscheiden Sie (ohne eine Begründung anzugeben), ob für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (i) für $b = 0$ — ☐ lösbar ☐ eindeutig lösbar ☐ nicht lösbar — ist.

   (ii) für $b = 1$ — ☐ lösbar ☐ eindeutig lösbar ☐ nicht lösbar — ist.

3. Für welche $b \in \mathbb{R}$ sind die Spaltenvektoren von A linear unabhängig?

2. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Sind die folgenden Teilmengen des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume? (Zutreffendes bitte ankreuzen, ohne Angabe einer Begründung.)

	wahr	falsch
$\{\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0 \text{ und } x_3 = 0\}$	○	○
$\{\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1\}$	○	○
$\{s\vec{a} + t\vec{b} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$	○	○
$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$	○	○

3. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(t) \;=\; \vec{y}(t) \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie zuerst die Potenzen A^0, A^1, A^2, A^3, danach e^{tA}. Lösen Sie die folgenden drei Anfangswertprobleme bestehend aus der obigen Differentialgleichung und den Anfangswerten

$$\text{(i)}\ \vec{y}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \text{(ii)}\ \vec{y}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \text{(iii)}\ \vec{y}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

4. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \;=\; x_1 y_1 + x_2 y_2 \;, \qquad \text{für } \vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right), \vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2 \;.$$

Sei $\{\vec{n}, \vec{m}\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ und T die folgende lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\;\rightarrow\; \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} &\;\mapsto\; \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle \vec{n} \;. \end{aligned}$$

(i) Wie sieht die darstellende Matrix A_T bezüglich der Basis $\{\vec{n}, \vec{m}\}$ aus?

(ii) Zeigen Sie, daß $\vec{n}$ ein Eigenvektor von A_T zum Eigenwert null und $\vec{m}$ ein Eigenvektor von A_T zum Eigenwert eins ist.

(iii) Zeigen Sie, daß gilt: $T \circ T \;=\; T$, d.h. $T(T(\vec{x})) = T(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

(iv) Zeigen Sie, daß der Kern der Abbildung T die Menge $\{\lambda \vec{n} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist.

(v) Wie groß ist die Dimension des Kerns von T?