# Technische Universität Berlin

**Fakultät II – Institut für Mathematik** WS 01/02
**Seiler, Rambau, Wiehe, Gentz, Scherfner** 20.02.2002

## Februar – Klausur (Rechenteil)
## Lineare Algebra für Ingenieure

Name: ............................ Vorname: ............................

Matr.–Nr.: ......................... Studiengang: .........................

Ich **wünsche** den Aushang des Klausurergebnisses unter Angabe meiner Matr.–Nr. (ohne Namen) am Schwarzen Brett und im WWW.

......................
Unterschrift

---

Neben einem handbeschriebenen Din-A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem seperaten Din-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

---

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

## 1. Aufgabe
10 Punkte

Sei der $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt und ferner seien

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(*i*) Zeigen Sie, dass diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(*ii*) Stellen Sie den Vektor $\vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dar.

(*iii*) Orthonormalisieren Sie diese Basis mit Hilfe des Schmidtschen Verfahrens.

## 2. Aufgabe
6 Punkte

Ist die folgende Matrix eine unitäre lineare Abbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^2$ versehen mit dem Standardskalarprodukt?

$$M := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

## 3. Aufgabe
12 Punkte

Für $a \in \mathbb{R}$, sei $A$ eine lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^3$ dargestellt durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(*i*) Geben Sie das charakteristische Polynom an.

(*ii*) Bestimmen Sie die Nullstellen.

(*iii*) Was sind die Eigenwerte der linearen Abbildung $A$?

(*iv*) Geben Sie die Dimension des Kernes in Abhängigkeit von $a$ an.

## 4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

(*i*) Seien

$$B := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad D := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Verifizieren Sie, dass

$$B^{-1} = B , \qquad A = BDB^{-1} .$$

(*ii*) Berechnen Sie die Matrix $e^{At}$.

(*iii*) Geben Sie die Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung mit Anfangsbedingung an:

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\,\vec{y}(t) , \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$