Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Seiler, Rambau, Wiehe, Gentz, Scherfner
Körner, Schulz-Baldes, Schwarz

WS 2001/02

Lösungen zur Klausur am 20.2.2002 - Verständnisteil „Lineare Algebra für Ingenieure“

http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/main.html

---

1. Aufgabe: **8 Punkte**

wahr, falsch, wahr, falsch (je 2 Punkte)

2. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (2 Punkte) $\det(B) = 2a(a-1) = 0$ genau dann wenn $a = 0$ oder $a = 1$.

(ii) (2 Punkte) Die Spalten sind liner unabhängig genau dann wenn $\det(B) \neq 0$, d.h. genau dann wenn $a \neq 0$ und $a \neq 1$.

(iii) (2 Punkte) Ja, denn $\det(B) = 4 \neq 0$.

(iv) (2 Punkte) Ja, denn B ist dann ja invertierbar nach *(iii)*.

(v) (2 Punkte) Nein, denn die 2. und 3. Komponente von $\vec{b}$ sind nicht gleich, was für alle Vektoren des Bildes der Fall ist.

3. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (3 Punkte) $\det(C - \lambda E_2) = \lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1$ (2 Punkte). Nullstellen $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ (1 Punkt).

(ii) (1 Punkt) Rotation um $-\frac{\pi}{4}$.

(iii) (2 Punkte) Es gibt keine Eigenwerte, da die Nullstellen einen nicht verschwindenden Imaginärteil haben.

(iv) (4 Punkte) Die Eigenwerte sind $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ (2 Punkte). Zwei linear unabhängige Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ (2 Punkte).

4. Aufgabe: **12 Punkte**

(i) (2 Punkte) Die Vektoren sind normiert und orthogonal da $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$, $\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1$ und $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

(ii) (3 Punkte) $S\vec{a} = \vec{a}$, $S\vec{b} = -\vec{b}$ (2 Punkte). Skizze (1 Punkt).

(iii) (2 Punkte) Spiegelung an der Geraden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$.

(iv) (3 Punkte) Da $S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(v) (2 Punkte) S ist invertierbar (denn $S^2 = E$). Somit ist das Bild ganz $\mathbb{R}^2$ und eine Basis ist gegeben z.B. durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$.