Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 02
Faermann, Steinbach 24.07.2002

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich **wünsche** den Aushang des Klausurgebnisses unter Angabe meiner Matr.–Nr. (ohne Namen) am Schwarzen Brett und im WWW. ....
Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen Din-A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem seperaten Din-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

12 Punkte

Für $a \in \mathbb{R}$, sei A eine lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^3$ dargestellt durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} .$$

(i) Geben Sie das charakteristische Polynom an.

(ii) Bestimmen Sie die Nullstellen des charakteristische Polynomes.

(iii) Was sind die Eigenwerte von A?

(iv) Geben Sie die Dimension des Lösungsraumes des homogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ in Abhängigkeit von a an.

(v) Berechnen Sie für $a = 1$ einen Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von A.

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

(i) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

(ii) Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear abhängig? Warum?

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauss-Algorithmus den Lösungsraum des Gleichungssystems $B\vec{x} = \vec{0}$.

(iv) Stellen Sie einen der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ als Linearkombination der beiden anderen dar.

3. Aufgabe

10 Punkte

Betrachten Sie die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 8y \;=\; -4x + 1 \;.$$

(i) Bestimmen Sie die Lösungen der homogenen Gleichung.

(ii) Bestimmen Sie eine partikulare Lösung der inhomogenen Gleichung.

(iii) Geben Sie die allgemeine Lösungsmenge an.

(iv) Geben Sie die Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 3$ und $\frac{dy}{dx}(0) = 0$ an.

4. Aufgabe

8 Punkte

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}_2[x]$ der reellen Polynome in x vom Grade kleiner oder gleich 2. Er sei versehen mit folgendem Skalarprodukt:

$$\langle q, p\rangle \;=\; \int_0^1 q(x)p(x)\, x dx \;, \qquad q, p \in \mathbb{R}_2[x] \;.$$

Wie in Vorlesung und Übung verifiziert wurde, ist $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}_2[x]$. Die induzierte Norm ist gegeben durch $\|q\| = \sqrt{\langle q, q\rangle}$.

(i) Berechnen Sie die Norm des Polynoms $r(x) = 2x - 1$ und normieren Sie es anschliessend.

(iii) Berechnen Sie die Projektion (bzgl. obigen Skalarproduktes) des Polynoms $s(x) = x^2$ auf die Richtung gegeben durch das Polynom r.