Technische Universität Berlin **SS 20002**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Faermann, Steinbach
Bollhoefer, Kato, Schulz-Baldes

Lösungen zur Klausur am 24.7.2002 - Verständnisteil
„Lineare Algebra für Ingenieure“

http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/main.html

---

1. Aufgabe: **12 Punkte**

(i) (4 Punkte) Mit der Regel von Sarrus:

$$\det(A - \lambda E) \;=\; (i - \lambda)((b - \lambda)^2 + c^2) \;=\; (i - \lambda)(\lambda - b + ic)(\lambda - b - ic)\;.$$

(ii) (2 Punkte) Eigenwerte $i, b - ic, b + ic$

(iii) (3 Punkte) Das tritt ein wenn $(i = b - ic)$ oder $(i = b + ic)$ oder $(b - ic = b + ic)$, d.h. $(b = 0$ und $c = -1)$ oder $(b = 0$ und $c = 1)$ oder $(c = 0)$ (je 1 Punkt).

(iv) (3 Punkte) Dann muss gelten $i = b - ic = b + ic$, somit $b = i$ und $c = 0$. Da aber vorrausgesetzt war, dass $b \in \mathcal{R}$, gibt es keinen zugelassen Werte der Parameter, für welche die Eigenwerte zusammenfallen.

2. Aufgabe: **8 Punkte**

wahr/wahr/falsch/falsch (je 2 Punkte für richtige Antwort)

3. Aufgabe: **8 Punkte**

(i) (4 Punkte) Dann müssten $\mu, \nu \in \mathcal{R}$ existieren, so dass $C = \lambda A + \nu B$ gilt. Explizit ausgeschrieben müsste also gelten

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

Die 6 resultierenden Gleichungen für λ, μ sind nicht gleichzeitig zu erfüllen. Somit ist C nicht Linearkombination von A und B.

(ii) (2 Punkte) Wegen *(i)* sind die Vektoren linear unabhängig.

(iii) (2 Punkte) Die Dimension des von A, B, C aufgespannten Vektorraumes ist 3, da es 3 linear unabhängige Vektoren gibt.

4. Aufgabe: **12 Punkte**

(i) (3 Punkte) Es soll gelten $L(\vec{v}_j) = A\vec{v}_j$ für $j = 1, 2, 3$. Für $j = 1$ heisst das

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was korrekt ist. Ebenso für $j = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ähnlich verifiziert man $j = 3$ (je 1 Punkt).

(ii) (3 Punkte) Zu lösen ist:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 2z \\ x + 2z \end{pmatrix}.$$

Setze $z = t$, dann ist $y = -t$ und $x = -2t$. Somit ist der Lösungsraum

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathcal{R} \right\}.$$

(iii) (4 Punkte) Hier ist zu lösen

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 2z \\ x + 2z \end{pmatrix}.$$

Eine partikulare Lösung ist z.B. gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2 Punkte). Nun ist die allgemeine Lösung gegeben durch die Summe der partikularen Lösung und der Lösungen der homogenen Gleichung bestimmt in *(ii)* (2 Punkte):

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathcal{R} \right\}.$$

(iv) (2 Punkte) Ja, es ist ein Unterraum, denn es handelt sich um die Lösungen einer homogenen Gleichung.