Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 03

Seiler, Faermann, Hömberg 15. Oktober 2003

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben **einem handbeschriebenen** A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Sei $a \in \mathbb{R}$. Gegeben seien die 3 Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Weiterhin sei folgendes Maple Worksheet gegeben.

```
> B := matrix([[1,0,-1],[a,2,0],[1,1,0]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(B);
```

$$-a+2$$

```
> rank(B);
```

$$3$$

(i) Gilt das Ergebnis des 3. Befehls im Maple Worksheet für alle $a \in \mathbb{R}$?

(ii) Für welches $a \in \mathbb{R}$ werden die 3 Vektoren linear abhängig? Für dieses a stellen Sie einen der Vektoren als Linearkombination der übrigen beiden dar.

(iii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix B invertierbar?

(iv) Setzen Sie $a = 1$. Berechnen Sie das Matrixprodukt von B mit $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
In welcher Beziehung steht C zu B?

2. Aufgabe

10 Punkte

Betrachten Sie den Vektorraum $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ der 2×2 Matrizen mit reellen Einträgen. Folgende Abbildung sei gegeben:

$$\begin{aligned} \text{Spur} : M(2 \times 2, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \text{Spur}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := a + d \end{aligned}$$

(i) Ist Spur eine lineare Abbildung?

(ii) Bestimmen Sie den Kern von Spur.

(iii) Ist der Kern ein Unterraum von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$?

(iv) Welche Dimension hat der Kern ?

3. Aufgabe

12 Punkte

Geben Sie je eine 2×2-Matrix mit reellen Einträgen mit folgenden Eigenschaften an:

(i) Die Matrix besitzt zwei verschiedene reelle Eigenwerte.

(ii) Die Matrix besitzt keinen reellen Eigenwert.

(iii) Die Matrix ist nilpotent, d.h. sie ist nicht gleich der Nullmatrix, aber ihre zweite Potenz ist gleich der Nullmatrix.

(iv) Die Matrix ist nicht diagonalisierbar und hat nur einen von Null verschiedenen Eigenwert.

4. Aufgabe

8 Punkte

Welche der folgenden Paare von Funktionen können für geeignetes $f \in \mathbb{R}$, $f \neq 2$, eine Lösungsbasis der folgenden homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten bilden?

$$y''(t) + f\, y'(t) + y(t) \;=\; 0\ .$$

(keine Begründung notwendig; je richtiger Antwort 2 Punkte.)

	Lösungsbasis	keine Lösungsbasis
e^t, e^{-2t}	○	○
e^t, $\cos(t)$	○	○

Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ sind Unterräume? (Je richtiger Antwort 2 Punkte.)

	Unterraum	kein Unterraum
$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0 \right\}$	○	○
$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y \text{ und } x = 2z + 1 \right\}$	○	○