A

Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Eppler, Richter, Scherfner, Seiler, Zorn

WS 03/04
25. Februar 2004

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben **einem handbeschriebenen** A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Sei die Matrix A gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Tipp: $\cos 45° = \sin 45° = 1/\sqrt{2}$.

1. Welche (reellen) Eigenwerte hat A als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$?
2. Welche Eigenvektoren hat A als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$?
3. Untersuchen Sie, ob A eine orthogonale Matrix ist.
4. Bestimmen Sie die Determinante von A.
5. Falls A invertierbar ist, geben Sie die Inverse von A an. Ansonsten bestimmen Sie den Kern von A. (Eine lange Rechnung ist hierfür *nicht notwendig*!)

2. Aufgabe

4 Punkte

Bezeichne D_z die Drehmatrix, die eine Drehung um 90 Grad im mathematisch positiven Sinne um die z-Achse beschreibt, sei ebenso D_x eine Drehung um 90 Grad um die x-Achse, sei E_3 die 3×3 Einheitsmatrix. Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(Pro richtiger Antwort gibt es einen Punkt, eine Begründung der Antwort ist in dieser Aufgabe nicht notwendig.)

	richtig	falsch
D_z ist invertierbar	○	○
$D_z + D_x = D_x + D_z$	○	○
$D_z D_x = D_x D_z$	○	○
$D_z - E_3$ ist invertierbar	○	○

3. Aufgabe

12 Punkte

Sei $b \in \mathbb{R}$. Sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie den Kern von A in Abhängigkeit von b.
2. Für welche b hat das *homogene* Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen?
3. Falls $A\vec{x} = \vec{0}$ unendliche viele Lösungen besitzt, ist dann das *inhomogene* Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   lösbar? Falls ja, so geben Sie die Lösungsmenge an.

4. Aufgabe

14 Punkte

Sei $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen. Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} T : M(2 \times 2, \mathbb{R}) &\longrightarrow M(2 \times 2, \mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben, die eine Matrix auf ihre Transponierte abbildet.

1. Überprüfen Sie, ob T eine lineare Abbildung ist.
2. Bestimmen Sie T^2 und, falls T invertierbar ist, auch T^{-1}.
3. Bestimmen Sie den Kern von T.
4. Sei $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ eine Basis des $M(2 \times 2, \mathbb{R})$:

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie die darstellende Matrix von T bezüglich dieser Basis.