

1 Lösungen Verständnisteil B

1.1 Aufgabe 1

1. Die Ausgabe beinhaltet die Angabe der Eigenwerte, ihrer algebraischen Vielfachheit sowie eine Basis des jeweiligen Eigenraumes, und somit auch die geometrischen Vielfachheiten. Konkret:

Fünf ist Eigenwert mit zweifacher algebraischer Vielfachheit und Eigenbasis $\{(1, 0, 0)^T\}$, 9 ist Eigenwert mit einfacher algebraischer Vielfachheit, der Eigenraum wird aufgespannt von $(1, 1, 2)^T$.

2. B ist nicht diagonalisierbar, da die algebraische Vielfachheit von 5 zwei ist, aber nur ein linear unabhängiger Eigenvektor existiert.
3. Der Kern der Matrix M wird vom Vektor $(-3, -1, 1)^T$ aufgespannt.
4. Da M offenbar nichttrivialen Kern besitzt, ist M nicht invertierbar.
5. Da M nicht invertierbar ist, muss die Determinante den Wert 0 haben.

1.2 Aufgabe 2

- 1.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Alle Eigenwerte sind 0, da

$$\det(N - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 0$$

3. Eigenvektoren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4. N ist nicht diagonalisierbar, da $\lambda = 0$ die algebraische Vielfachheit 3, aber die geometrische Vielfachheit 1 besitzt.

5. Offenbar verschwindet die dritte und alle weiteren Potenzen von N .
Somit:

$$\begin{aligned} \exp(tN) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Die Lösung des Anfangswertproblem es ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) = \exp(tN)\vec{y}(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ t+3 \\ \frac{t^2}{2} + 3t + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Aufgabe 3

1. richtig
2. falsch
3. falsch
4. richtig
5. richtig

1.4 Aufgabe 4

1. Vier Polynome in einem Vektorraum der Dimension 3 sind immer linear abhängig. Alternativ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

2. Entweder ablesen $x = p_2(x) - p_4(x)$ oder nachrechnen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow -2\lambda_3 + \lambda_4 = -1$ Wähle etwa $\lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1$
 $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$ $\Rightarrow \lambda_2 = 1$
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0$

3. Die einfachst-mögliche Wahl ist offensichtlich

$$b_1(x) = 1, b_2(x) = x, b_3(x) = x^2$$

4. Durch Nachzählen: Die Dimension ist offenbar gleich drei.