TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2004
Fakultät II - Mathematik
J. Liesen/F. Lutz/R. Seiler

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Juli-Klausur

Stand: 14. September 2004

Rechenteil

1. Aufgabe (8 Punkte)

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aufstellen der erweiterten Matrix $(A|E)$ und Umformen der Matrix A mittels des Gaußschen Algorithmus auf Normierte Zeilenstufenform liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{3.Zeile:\ 3.Z-3\cdot 1.Z}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{3.Zeile:\ 3.Z-2.Z}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{3.Zeile:\ -1\cdot 3.Z}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{1.Zeile:\ 1.Z-2\cdot 2.Z}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{1.Zeile:\ 1.Z+3\cdot 3.Z}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{2.Zeile:\ 2.Z-2\cdot 3.Z}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Hieraus lässt sich ablesen, dass die Matrix A invertierbar ist, da wir auf der linken Seite die Einheitsmatrix erhalten haben. Die rechte Seite ist die Inverse von A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ -6 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die *eindeutige* Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ist damit

$$\vec{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ -6 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ -23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien die Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ gegeben durch

$$\mathcal{B}_1 := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad \mathcal{B}_2 := \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\}.$$

(i) Bestimmen Sie die darstellende Matrix S der Koordinatentransformation von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

Mit anderen Worten: Finden Sie diejenige Matrix S, die $\vec{x}_{\mathcal{B}_2} = S\vec{x}_{\mathcal{B}_1}$ für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

(ii) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$.

Lösung:

(i) Seien $K_{\mathcal{B}_1}$ und $K_{\mathcal{B}_2}$ die Koordinatenabbildungen bzgl. der Basen $\mathcal{B}_1$ bzw. $\mathcal{B}_1$, so ist die Basiswechselmatrix S von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ gegeben durch

$$S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}.$$

Da die Basis $\mathcal{B}_1$ die Standardbasis ist, ist die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}_1}$ die identische Abbildung, d.h. sie ist als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\vec{x} \mapsto E_2\vec{x}$ mit der (2×2)-Einheitsmatrix E_2. Für $K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$ als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liest man die entsprechende (2×2)-Matrix aus der Basis direkt ab; in ihr stehen die Basisvektoren als Spalten:

$$K_{\mathcal{B}_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen ihre Inverse (z.B. mit dem Gaußalgorithmus):

$$K_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Basiswechselmatrix:

$$S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1} = K_{\mathcal{B}_2} \circ E_2 = K_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Koordinaten des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ berechnen sich gemäß:

$$\vec{x}_{\mathcal{B}_2} = K_{\mathcal{B}_2}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

(10 Punkte)

Die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

(i) Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ aufgespannten Spates.

(ii) Berechnen Sie aus $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ nach dem Verfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ von $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Lösung:

(i) Das Volumen V des von den Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ aufgespannten Spates ist gegeben durch

$$\begin{aligned} V &= |\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)| \\ &= \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \right| \\ &= \left| -3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right| \qquad \text{(Entwicklung nach der 2. Spalte)} \\ &= |-3 \cdot (-12) - 3 \cdot 3| \\ &= 27. \end{aligned}$$

(ii) Das Gram-Schmidt-Verfahren, angewandt auf die ersten zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, liefert die Vektoren:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1}{\|\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1\|}.$$

Für den zweiten Vektor $\vec{w}_2$ berechnen wir zuerst:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{9}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Die Norm dieses Vektors ist $\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$, d.h. als zweiten Vektor $\vec{w}_2$ für die Orthonormalbasis $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ von $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ erhalten wir

$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1}{\| \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 \|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

4. Aufgabe (14 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B.

(ii) Diagonalisieren Sie B, das heißt, bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare (2×2)-Matrix S, so dass $D = SBS^{-1}$ ist.

(iii) Berechnen Sie e^{tB} für $t \in \mathbb{R}$.

(iv) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = B \, \vec{x}(t) , \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Lösung:

(i) Das charakteristische Polynom von B ist

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0,$$

also hat B die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$.

Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ (nach dem Verfahren von Gauß):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-2 & -1 & 0 \\ -1 & 3-2 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

woraus wir ablesen, dass $x_2 = x_1$ für jeden Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, also

$$\vec{v}_1 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für } s \in \mathbb{R},\ s \neq 0.$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-4 & -1 & 0 \\ -1 & 3-4 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

woraus wir ablesen, dass $x_2 = -x_1$ für jeden Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$, also

$$\vec{v}_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für } s \in \mathbb{R},\ s \neq 0.$$

(ii) Für die linear unabhängigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist die S^{-1}-Matrix gegeben durch

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

mit der Inversen

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} S^{-1}.$$

[Bestimmung der Inversen S entweder direkt durch explizite Formel, oder mittels Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).]$$

Die zugehörige Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen ist

$$SBS^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Berechnung der Exponentialreihe erfolgt in der Diagonalisierung von B:

$$\begin{aligned} e^{tB} &= S^{-1} \left[e^{t\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \right] S = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} S \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{4t} & e^{2t} - e^{4t} \\ e^{2t} - e^{4t} & e^{2t} + e^{4t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iv) Es ist damit

$$\vec{x}(t) = e^{tB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{4t} \\ e^{2t} - e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Verständnisteil

1. Aufgabe

(14 Punkte)

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Welchen Rang hat die Matrix A?

(ii) Welche Dimension hat der Kern der linearen Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$?

(iii) Für welche Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$ ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

(iv) Geben Sie die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme

$$\text{(a)} \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{an.}$$

Lösung:

(i) Die Matrix A hat den Rang 3.

Begründung: Die Matrix ist in Zeilenstufenform und hat drei vom Nullvektor verschiedene Zeilen.

(ii) Es ist $\dim(\text{Kern}(A)) = 5 - \text{Rang}(A) = 2$,

(iii) Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist für $b_4 = b_5 = 0$ lösbar, denn dann (und nur dann) ist $\text{Rang}(A|\vec{b}) = \text{Rang}(A)$.

(iv) (a) Die Lösungsmenge ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) Dies Gleichungssystem ist nicht lösbar ($\mathbb{L} = \emptyset$), da der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix größer als der Rang von A ist.

2. Aufgabe

(7 Punkte)

Die Vektoren

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\ \vec{w}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{w}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

(i) Geben Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ aufgespannten Spates an.

(ii) Geben Sie die Inverse W^{-1} der Matrix W an, die die Vektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ als Spaltenvektoren hat.

(iii) Geben Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $\qquad W\vec{x} = \vec{w}_1 \qquad$ an.

Lösung:

(i) Das Volumen des Spats ist 1.
Da die Vektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ eine Orthonormalbasis bilden, ist der Spat ein Würfel mit Kantenlänge 1.
(andere Begründungen sind natürlich auch zulässig)

(ii)

$$W^{-1} = W^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\2 & 2 & 1\\-2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

denn W ist eine orthogonale Matrix.

(iii) Die Lösung des linearen Gleichungssystems $W\vec{x} = \vec{w}_1$ ist
$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, denn $\vec{w}_1$ ist die erste Spalte der Matrix W.

3. Aufgabe

(9 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix}5 & 1 & \frac{5}{61} & -\frac{1}{2}\\0 & -3 & 1 & 7\\0 & 0 & 1 & \frac{2}{3}\\0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$.

(i) Geben Sie die Determinante von B an.

(ii) Hat B reelle Eigenwerte? Falls ja, welche? Welche Dimensionen haben die zugehörigen Eigenräume?

(iii) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an. Falls nein, begründen Sie, weshalb B nicht diagonalisierbar ist.

Lösung:

(i) Die Determinante der Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente, also ist $\det(B) = 5 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 4 = -60$.

(ii) Ja, B hat reelle Eigenwerte
Diese sind, da B eine Dreiecksmatrix ist gerade die Diagonalelemente, also $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$,, $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_4 = 4$.
Alle zugehörigen Eigenräume habe die Dimension 1,
denn B hat 4 verschiedene Eigenwerte.

(iii) Ja, B ist diagonalisierbar und eine zugehörige Diagonalmatrix ist

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ lineare Teilräume sind.

Teilmenge	ist Teilraum (Ja/Nein)
$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 2\}$	Nein
$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -z = 3x + \frac{y}{2}\}$	Ja
$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$	Nein
$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1\}$	Nein
$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0\}$	Ja