Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04
Liesen, Lutz, Seiler 21. Juli 2004

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

In welchem Semester haben Sie (falls erforderlich)
60 % der Hausaufgabenpunkte erreicht? ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

1	2	3	4	Σ_R		Σ_V		Σ_{ges}

1. Aufgabe
8 Punkte

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Aufgabe
8 Punkte

Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien die Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ gegeben durch

$$\mathcal{B}_1 := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad \mathcal{B}_2 := \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\}.$$

(i) Bestimmen Sie die darstellende Matrix S der Koordinatentransformation von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

Mit anderen Worten: Finden Sie diejenige Matrix S, die $\vec{x}_{\mathcal{B}_2} = S\vec{x}_{\mathcal{B}_1}$ für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

(ii) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$.

3. Aufgabe
10 Punkte

Die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

(i) Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ aufgespannten Spates.

(ii) Berechnen Sie aus $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ nach dem Verfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ von $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

4. Aufgabe

14 Punkte

Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B.

(ii) Diagonalisieren Sie B, das heißt, bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare (2×2)-Matrix S, so dass $D = SBS^{-1}$ ist.

(iii) Berechnen Sie e^{tB} für $t \in \mathbb{R}$.

(iv) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = B\,\vec{x}(t)\,, \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$