Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04
Liesen, Lutz, Seiler 13. Oktober 2004

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

In welchem Semester haben Sie (falls erforderlich)
60 % der Hausaufgabenpunkte erreicht? ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

1	2	3	4	Σ_R		Σ_V		Σ_{ges}

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie den Rang der Matrix A.
2. Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$.

2. Aufgabe

7 Punkte

Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien die Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ gegeben durch

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix S der Koordinatentransformation von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

Mit anderen Worten: Finden Sie diejenige Matrix S, die $\vec{x}_{\mathcal{B}_2} = S\vec{x}_{\mathcal{B}_1}$ für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

3. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
2. Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.
3. Falls A diagonalisierbar ist, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an. Falls A nicht diagonalisierbar ist, begründen Sie, wieso die Matrix A nicht diagonalisierbar ist.

4. Aufgabe

12 Punkte

Betrachten Sie die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4x(t) = \cos(t) \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

1. Bestimmen Sie mit dem Exponentialansatz die Lösungsgesamtheit der zu (1) gehörenden **homogene** Differentialgleichung.
2. Zeigen Sie, dass durch $x_p(t) = \frac{1}{3}\cos(t)$ eine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung (1) gegeben ist.
3. Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **inhomogenen** Differentialgleichung (1).