TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 05
Fakultät II - Mathematik
V. Mehrmann/R. Nabben/R. Seiler

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Juli-Klausur

Stand: 22. August 2005

Rechenteil

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Die darstellende Matrix bzgl. der Standardbasis ist:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -3 \\ 3 & -4 & -11 & 7 \end{bmatrix}.$$

(1 Punkt)

(b) Um $L\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 42 \\ -52 \end{bmatrix}$ zu lösen, bringen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix in ZSF:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 8 & -3 & 42 \\ 3 & -4 & -11 & 7 & -52 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & -5 & 50 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & -40 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(2 Punkte $*$)

Damit erhält man zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 10 \end{aligned}$$

für vier Unbekannte. Man kann also zwei wählen: $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$ und bekommt

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 + \alpha - \beta \\ x_2 &= 10 - 2\alpha + \beta \end{aligned}$$

bzw.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 + \alpha + \beta \\ 10 - 2\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Die Lösungsmenge lautet

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2 Punkte)

(c) Um Kern L zu berechnen, bringt man die Matrix in Zeilenstufenform, s. (b). Dafür gibt es keinen Punkt, wenn es bei (b) schon dastand. Wenn es hier zum ersten Mal gerechnet wird, gibt es die oberen 2 P. ($*$) von (b).

Damit erhalten wir den Kern:

$$Kern\ L = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2 Punkte)

(d) Um das Bild zu berechnen, bringen wir A^T in ZSF

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ -1 & 8 & -11 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oder in NZSF

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2 Punkte) für eins von beiden.

Man transponiert wieder und erhält eine Basis des Bilds bzw. *Bild L*:

$$\mathcal{B}_{Bild\,L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\} \text{oder} \qquad \mathcal{B}_{Bild\,L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{23}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\}.$$

(1 Punkt)

2. Aufgabe

(14 Punkte)

(a) **Determinante** ausrechnen mit Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 + 4 = 5.$$

(1 P.)

(b) **Eigenwerte**

Charakteristisches Polynom [$\det(\lambda I - A)$ ist auch richtig]

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2((1-\lambda)^2 + 4) = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 5). \qquad \textbf{(2 P.)} \end{aligned}$$

Da bekommen wir schon die ersten beiden Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. **(1 P.)**

Also der Eigenwert 1 hat die algebraische Vielfachheit 2.

Die anderen Eigenwerte entweder

– aus $(1-\lambda)^2 + 4 = 0$ ablesen als $\lambda_{3,4} = 1 \pm 2i$ (1P) + Begründung (1P).

– oder als Nullstellen von $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ (auch 2P):

$$\lambda_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i.$$

(2 P.)

Beide Eigenwerte haben algebraische VF 1.

Für die algebraischen Vielfachheiten gibts noch einen Punkt. **(1)**

(b) **Eigenvektoren** als Lösung der Gleichung $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$. Es gibt jeweils zwei Punkte auf Rechnung+Eigenvektoren. Bitte keinen gesteigerten Wert darauf legen, dass die Parameter s, t komplex sein sollen.

<u>Zum EW 1</u> **(2)**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \text{ hat Lösung } \vec{v} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ geometrische VF = 2.

<u>Zum EW $1 + 2i$</u> **(2)**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2i & 0 \end{array}\right] \overset{IV - iIII}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} -2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lösung:

$$\vec{v}_3 = s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{C}.$$

<u>Zum EW $1 - 2i$</u> **(2)**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2i & 0 \end{array}\right] \overset{IV + iIII}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lösung:

$$\vec{v}_3 = s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{C}.$$

Es gibt auch 2 P., wenn da steht: Komplexe EW tauchen bei reellen Matrizen immer als konjugiert komplexe Paare auf.

Noch einen Punkt für die geometrischen Vielfachheiten: = 2 für EW 1 und = 1 für die andern beiden. **(1)**

3. Aufgabe

(10 Punkte)

(a) Die Matrizen S und D sind **(2)**

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

(b) S^{-1} ist dann **(2)**

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Die Lösung ist gegeben durch $\vec{y}(t) = Se^{Dt}S^{-1}\vec{y}(0)$. **(1)**

Einen Punkt für **(1)**

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

Fürs Ausrechnen gibts auch Punkte: **(4)**

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) = Se^{Dt}S^{-1}\vec{y}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ -e^{-5t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3e^{2t} - e^{-5t} \\ 3e^{2t} - 2e^{-5t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Andersrum ausmultipliziert...

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-5t} \\ e^{2t} & 2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^{-5t} & -e^{2t} + e^{-5t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-5t} & -e^{2t} + 2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - e^{-5t} \\ 3e^{2t} - 2e^{-5t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

(6 Punkte)

(a) ausrechnen **(1 Punkt)**, Skizze **(1 Punkt)**.

(b) Drehung um Winkel α mit $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\alpha = \frac{1}{2}$ **(1 Punkt)**, d.h. $\alpha = 60$ Grad **(1 Punkt)**. Wer direkt $\alpha = 60$ Grad schreibt, bekommt **2 P.**

(c)

$$\begin{aligned}
T_2 T_2^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1 Punkt)} \\
&= I_3 \qquad \textbf{(1 Punkt)}.
\end{aligned}$$