TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 05
Fakultät II - Mathematik
M. Lübbecke/V. Mehrmann/R. Nabben/H. Schwandt/R. Seiler

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Oktober-Klausur

Stand: 14. Oktober 2005

Rechenteil

1. Aufgabe (9 Punkte)

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \textbf{(1 P.)}$$

$$\vec{l}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1\rangle \vec{w}_1 \quad \textbf{(1 P.)} \quad = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \textbf{(1 P.)} \quad = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \textbf{(1 P.)}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{l}_2}{\|\vec{l}_2\|} = \vec{l}_2 \quad \textbf{(1 P.)} \quad = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{l}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_1\rangle \vec{w}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_2\rangle \vec{w}_2 \quad \textbf{(1 P.)} \quad = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \textbf{(1 P.)} \quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \textbf{(1 P.)}$$

$$\vec{w}_3 = \frac{\vec{l}_3}{\|\vec{l}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \textbf{(1 P.)}$$

2. Aufgabe (12 Punkte)

(a)
$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det\begin{bmatrix}-\lambda & -4 & 4\\ 2 & -6-\lambda & 4\\ 2 & -4 & 2-\lambda\end{bmatrix} \textbf{(1P.)}\\ &= -\lambda\left[(-6-\lambda)(2-\lambda)+16\right]+4\left[2(2-\lambda)-8\right]+4\left[-8-2(-6-\lambda)\right] \textbf{(1P.)}\\ &= -\lambda(\lambda^2+4\lambda+4)+4(-2\lambda-4)+4(2\lambda+4) = -\lambda(\lambda+2)^2\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 0$ **(1 P.)**, $\lambda_2 = -2$ **(1 P.)**

Eigenvektor zu λ_1 : $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ **(1 P.)**. Berechnung: $\begin{bmatrix}0 & -4 & 4\\ 2 & -6 & 4\\ 2 & -4 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Damit sind $x_2 = x_3$ sowie $x_1 = x_3$.

Eigenvektoren zu λ_2 : $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ **(1 P.)**, $\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$ **(1 P.)** Berechnung: $\begin{bmatrix}2 & -4 & 4\\ 2 & -4 & 4\\ 2 & -4 & 4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Damit ist $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$ mit zwei freien Parameter.

(b) Für λ_1: alg. VFH = 1, geom. VFH = 1. Für λ_2: alg. VFH = 2, geom. VFH = 2.
Für mindestens 2 richtige Antworten (1 P.), für alle 4 **(2 P.)**

(c) $D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ **(1 P.)**, $S = \begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **(2 P.)** [nur 1 P., wenn S aus den Eigenvektoren besteht, aber eine falsche Reihenfolge der Eigenvektoren]

3. Aufgabe

(13 Punkte)

(a) Zum Rangberechnen bringen wir (und andere) die Matrix $[A|\vec{b}]$ in ZSF:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2\mu & \mu+2 \\ 1 & -7 & 0 & -2\mu+3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2\mu+4 & \mu \\ 0 & -6 & 2 & -2\mu+2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2\mu+4 & \mu \\ 0 & 0 & 4\mu+10 & 2 \end{array}\right] \textbf{(2 P.)}$$

Das bedeutet: Der Rang von $[A|\vec{b}]$ ist immer 3. **(1 Punkt)**

Der Rang von A ist 3, falls $4\mu + 10 \neq 0$ d.h. $\mu \neq -5/2$. **(1 Punkt)**
Der Rang ist 2 für $\mu = -5/2$. **(1 Punkt)**

(b) Für $\mu = -5/2$ hat das GS *keine* Lösung **(1 Punkt)**, weil $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}([A|\vec{b}])$. **(1 Punkt)**

Ist $\mu \neq -5/2$, dann hat das GS genau eine Lösung **(1 Punkt)**, weil A vollen Rang hat: in jeder Spalte der ZSF gibts ein Kopfelement. **(1 Punkt)**

(c) Die Lösung ist $\vec{x} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ bzw. die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 7/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. **(1 Punkt)**

(d) Für $\mu = -5/2$ hat die Matrix A nicht vollen Rang, für diesen Wert von μ besteht der Kern aus mehr Vektoren als nur dem Nullvektor. **(1 Punkt)**

Noch auf NZSF bringen **(1 Punkt)**

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2\mu+4 \\ 0 & 0 & 4\mu+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Damit haben wir die Basis des Kerns von A als $B = \left\{ \begin{bmatrix} 7/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. **(1 Punkt)**

4. Aufgabe

(6 Punkte)

(a) K_{B_2} ist die Inverse der Matrix, deren Spalten die Basisvektoren von B_2 sind.

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \textbf{(2 Punkte)}$$

Damit: $K_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. **(1 Punkt)**

(b) Es ist $S = K_{B_2} K_{B_1}^{-1}$ also $S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. **(2 Punkte)**

Keine Punkte, wenn S in falscher Reihenfolge multipliziert.

(c) $\vec{x}_{B_2} = S\vec{x}_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 17 \end{bmatrix}$ **(1 Punkt)**