Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Mehrmann, Nabben, Seiler

SS 05
12. Oktober 2005

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Ist die Menge $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linear unabhängig?

(b) Ist die Menge $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ linear unabhängig?

(c) Ist die Menge $\{\vec{u}, \vec{x}\}$ linear unabhängig?

(d) Ist die Menge $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}\}$ linear unabhängig?

(e) Geben Sie Vektoren aus der Menge $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ an, die zusammen ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$ bilden.

(f) Geben Sie Vektoren aus der Menge $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ an, die zusammen eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

Begründen Sie Ihre Antworten!

2. Aufgabe

12 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{4,4}$. Die lineare Abbildung $\quad L_A : \vec{x} \mapsto A\vec{x} \quad$ sei injektiv.

(a) Geben Sie den Kern von A an.

(b) Geben Sie den Rang von A an.

(c) Ist die Abbildung L_A surjektiv und/oder bijektiv?

(d) Hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{u}$ für beliebiges $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen?

(e) Was können Sie über die Determinante von A aussagen?

Begründen Sie Ihre Antworten!

3. Aufgabe

10 Punkte

Sind die folgenden Abbildungen linear? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $L_1 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{1,4}$ mit $L_1\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}$

(b) $L_2 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}$ mit $L_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$

(c) $L_3 : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ mit $L_3\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d+1 \end{bmatrix}$

4. Aufgabe

6 Punkte

Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

an.