TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 05
Fakultät II - Mathematik
M. Lübbecke/V. Mehrmann/R. Nabben/H. Schwandt/R. Seiler

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Oktober-Klausur

Stand: 14. Oktober 2005

Verständnisteil

1. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Ja, die Menge $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ ist linear unabhängig **(1 P.)**.
Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$ führt (2. Koordinate) zu der Gleichung $-2\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0$. Es folgt $\lambda_1 = 0$, also muss $\lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$ und damit $\lambda_2 = 0$ **(1 P.)**.

(b) Nein, die Menge $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ ist nicht linear unabhängig **(1 P.)**. $2\vec{u} + \vec{w} = \vec{0}$ **(1 P.)**

(c) Nein, die Menge $\{\vec{u}, \vec{x}\}$ ist nicht linear unabhängig **(1 P.)**. $\lambda\vec{x} = \vec{0}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ **(1 P.)**.

(d) Nein, die Menge $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}\}$ ist nicht linear unabhängig? **(1 P.)** $\lambda\vec{x} = \vec{0}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. (Alternativ: Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^2$ ist 2.) **(1 P.)**

(e) $\{\vec{u}, \vec{v}\}, \{\vec{v}, \vec{w}\}, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}\}$ oder $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$) **(1 P.)** ist ein Erzeugendensystem, denn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ (Alternativ: $\vec{v}, \vec{w}$) sind zwei lineare unabhängige Vektoren, also erzeugen sie ganz $\mathbb{R}^2$. **(1 P.)**

(f) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ (Alternativ: $\{\vec{v}, \vec{w}\}$) bildet eine Basis des $\mathbb{R}^2$ **(1 P.)**, weil jede Basis von $\mathbb{R}^2$ genau zwei linear unabhängigen Elemente enthält **(1 P.)**.

2. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Kern $A = \{\vec{0}\}$ **(1 P.)**
nach der Definition der Injektivität wird nur der Nullvektor auf den Nullvektor abgebildet **(1 P.)**.

(b) Rang $A = 4$ **(1 P.)**.
Injektivität impliziert, dass es keine Nullzeilen in ZSF gibt. Daher hat A vollen Rang **(1 P.)**.

(c) L_A ist surjektiv **(1 P.)**,
denn nach dem Dimensionssatz muss dim Bild $L_A = 4$ gelten **(1 P.)**.
L_A ist bijektiv **(1 P.)**,
weil es injektiv und surjektiv ist **(1 P.)**.

(d) Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{u}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ hat genau eine Lösung **(1 P.)**.
Eine (partikuläre) Lösung $\vec{x}_{part}$ existiert, denn L_A surjektiv ist. Nur eine existiert, weil jede Lösung der Form $\vec{x}_{part}+\vec{k}, k \in$ Kern A ist. Weil Kern A nur ein Element hat, ist $\vec{x}_{part}$ eindeutig. (Alternative: Eine quadratische Matrix von vollem Rang ist invertierbar. Somit ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{u}$ die einzige Lösung) **(1 P.)**.

(e) det $A \neq 0$ **(1 P.)**,
denn A ist eine quadratische Matrix von vollem Rang, d.h. A ist invertierbar **(1 P.)**.

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) L_1 ist linear. **(1 Punkt)**

Es gibt **(1 Punkt)** für das richtige Anwenden der Abbildungsvorschrift.

L_1 ist linear weil

$$\begin{aligned} L_1\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + L_1\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} \\ &= L_1\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) \quad (\textbf{1Punkt}) \end{aligned}$$

und

$$L_1\left(\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} = \lambda L_1\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

(1 Punkt)

(b) L_2 ist *nicht* linear. **(1 Punkt)**

Gegenbeispiel, z.B.: $\lambda = 2$, Matrix=Einheitsmatrix, skalare Multiplikation **(1 Punkt)**

Richtige Erklärung des Gegenbeispiels **(1 Punkt)**

(c) L_3 ist *nicht* linear. **(1 Punkt)**

Gegenbeispiel s.o. **(1 Punkt)**

Richtige Erklärung des Gegenbeispiels **(1 Punkt)**

4. Aufgabe (6 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0) = Se^{Dt}S^{-1}\vec{x}(0)$. **(1 Punkt)**
Eigenvektoren sind die Einheitsvektoren **(1 Punkt)**, $S = I$ **(1 Punkt)**, $D = A$ **(1 Punkt)**,
(Alternativ: A ist Diagonalmatrix und Lösung ist gegeben durch $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0)$.)
$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$ **(1 Punkt)**
Die gesuchte Lösung ist **(1 Punkt)**

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$$