Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
B. Jacob/J. Liesen/R. Nabben/R. Seiler/T. Stykel

WS 05/06
22. Februar 2006

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze Begründung an!
Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe

13 Punkte

Beantworten Sie die folgenden Fragen für $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Welche Dimension hat der Kern der linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$?

(b) Hat die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen?

(c) Sind die Spalten von A linear unabhängig?

(d) Ist A invertierbar?

(e) Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A?

(f) Ist A diagonalisierbar?

2. Aufgabe

10 Punkte

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und dessen assoziierter Norm $\|\cdot\|$. Sei S die Spiegelung an der x-Achse.

(a) Ist die lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto S\vec{x}$ injektiv? Ist sie surjektiv?

(b) Ist S eine invertierbare Abbildung?

(c) Ist S eine orthogonale Abbildung?

(d) Geben Sie die Eigenwerte und jeweils alle zugehörigen Eigenräume von S an.

3. Aufgabe

9 Punkte

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und dessen assoziierter Norm $\|\cdot\|$. Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Mengen, ob es sich um einen Teilraum des $\mathbb{R}^2$ handelt.

(a) $M_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 7x_1 - 5x_2 = 4 \right\}$

(b) $M_2 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \rangle = 0 \right\}$

(c) $M_3 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x}\| \leq 1 \right\}$

4. Aufgabe

8 Punkte

Finden Sie für jede der folgenden Aussagen eine von Null und der Einheitsmatrix verschiedene Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, so dass die Aussage gilt.

(a) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $AA^T = A^TA$

(c) A nicht invertierbar

(d) A nicht diagonalisierbar