Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 05/06
B. Jacob/J. Liesen/R. Nabben/R. Seiler/T. Stykel 12. April 2006

April – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

14 Punkte

(a) $A^T A = I_3 (= E_3)$, (I oder E soll man auch akzeptieren) weil A eine orthogonale Matrix ist.
(eine alternative Begründung: $\langle (\text{Zeile } i)^{\mathrm{T}}, \text{Spalte } j \rangle = \delta_{ij}$ für $1 \leq i \leq 3$.)

(b) A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, weil $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} A = I$ gilt.

(c) $|\det(A)| = 1$: Aus $AA^{\mathrm{T}} = I$ und den Eigenschaften der Determinante folgt $\det A \det A^{\mathrm{T}} = \det I = 1$. Nun ist aber $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$ und damit $(\det A)^2 = 1$

(d) Die Zeilen von A sind **nicht** linear abhängig, weil die Spalten von A eine Basis bilden und Spaltenrang = Zeilenrang.

(e) Das LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat genau eine Lösung ($\vec{x} = \vec{0}$). Rang $A = 3$ heisst, dass die NZSF von A die Einheitsmatrix ist. Die Lösung des LGSs ist dann eindeutig. (Alternative Begründungen sind auch akzeptabel. Beispiel: Rang $A = 3$ heisst, dass A invertierbar ist. Somit ist $A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{0}$ oder $\vec{x} = \vec{0}$.)

(f) $\|A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\| = \sqrt{\langle A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle} = \sqrt{\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle} = \sqrt{2}$

2. Aufgabe

11 Punkte

(a)

$$L\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= 8L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 4L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$= 8(x^2 + 1) + 4(x) + 1(0) = 8x^2 + 4x + 8.$

(b) L ist nicht injektiv, weil aus $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$ folgt $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in$ Kern L.

(c) L ist nicht surjektiv, weil z.B. $x^2 \notin$ Bild L gilt.

(d) L ist nicht invertierbar. Die Abbildung ist nicht injektiv und surjektiv.

(e) $\mathcal{L} = \emptyset$. Die lineare Gleichung $a(x^2 + 1) + b(x) = 0x^2 + x + 1$ hat keine Lösung.

3. Aufgabe 8 Punkte

(a) Zuerst liegt das Nullpolynom $p_0 = 0$ in P_1 ($p_0(1) = 0$), also ist P_1 nicht leer. Seien $p, q \in P_1$ (d.h. $p(1) = q(1) = 0$) und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zu zeigen: P_1 ist abgeschlossen bzgl. der Addition und der Skalarmultiplikation.
Addition: Die Summe $p + q$ ist wieder ein Element von P_1, da $(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$
Skalarmultiplikation: Weil $(\lambda p)(1) = \lambda(p(1)) = \lambda \cdot 0 = 0$, ist $\lambda p \in P_1$.
Die Bedingungen eines Teilraums sind damit erfüllt und P_1 ist ein Teilraum.

(b) P_2 ist kein Teilraum: $\|\vec{0}\| = 0 \not\geq 1 \implies \vec{0} \notin P_2$.

(c) P_3 ist ein Teilraum, weil $P_3 = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ gilt.

4. Aufgabe 7 Punkte

Die Lösung soll deutlich folgende Information enthalten:

$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (Eigenvektoren als Spalten)

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ und/oder $e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ (Eigenwerte auf der Diagonal + Rechenregel)

$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (nach dem Regel für das invertieren von 2×2 Matrizen oder nach Rechnen)

$$\vec{y}(t) = Se^{Dt}S^{-1}\vec{y}_{t_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{3t} \\ 3e^{3t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

Alternativ: $\vec{y}_0 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{y}(t) = e^{3t} \cdot 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-t} \cdot 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{3t} \\ 3e^{3t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$