Lösungen Rechenteil Juliklausur SS 06

Anmerkung: Punkte werden von den Studenten verdient, nicht von den Korrekteuren gegeben.

Aufgabe 1

(a) Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -15 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow Rang(A) \neq Rang(A|b) \;\Rightarrow$ GS nicht lösbar, $L = \emptyset$.

(b) Kern: Wir nehmen gleich die NZSF von A, die wir oben berechnet haben.

$\Rightarrow$ eine Basis des Kerns ist $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, damit ist der Kern von A gegeben durch $Kern(L_A) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Bild: Das Bild von L_A wird von den Spaltenvektoren von A aufgespannt

$\Rightarrow Bild(L_A) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$.

(c)

$$B = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

(d) Wir bestimmen die NZSF von B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ der Rang von B ist 1.

Aufgabe 4

(a) Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (2-\lambda)((3-\lambda)(-\lambda)+2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \end{aligned}$$

Nullstellen: Der erste Linearfaktor hat die Nullstelle 2, der zweite Faktor die Nullstellen 1 und 2.

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$: Bestimmen des Kerns von $A - I$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Basis des Kerns ist $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Eigenraum $V_1 = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{C}\right\}$

Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$: Bestimmen des Kerns von $A - 2I$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Basis des Kerns ist $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\Rightarrow$ Eigenraum $V_1 = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \left\{ s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{C}\right\}$

(b) Untersuchen, ob alg=geom Vielfachheit für alle Eigenwerte:

Eigenwert $\lambda_1 = 1$: algebraische Vielfachheit=1, geometrische Vielfachheit=1

Eigenwert $\lambda_2 = 2$: algebraische Vielfachheit=2, geometrische Vielfachheit=2

$\Rightarrow$ Matrix diagonalisierbar

$\Rightarrow$ eine Diagonalmatrix wäre $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 2

(a) (i) $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(ii) $\vec{l}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \cdot \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\vec{l}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_2 \rangle \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 - 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

(iv) $\vec{l}_4 = \vec{v}_4 - \langle \vec{v}_4, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 - \langle \vec{v}_4, \vec{w}_2 \rangle \vec{w}_2 - \langle \vec{v}_4, \vec{w}_3 \rangle \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 - \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\vec{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(b) Die Koordinaten λ_i von $\vec{x}$ in der ONB $\mathcal{B}$ bekommt aus $\lambda_i = \langle \vec{x}, \vec{w}_i \rangle$.

Also $\vec{x}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{6}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

(c) Die Matrix Q wird aus den Vektoren $\vec{w}_1..\vec{w}_4$ gebildet:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Die Matrix R bekommt man aus $R = Q^T A$, oder man bestimmt die Einträge R aus den eben berechneten Skalarprodukten $\langle \vec{v}_i, \vec{w}_j \rangle$.

Also erhält man:

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(d) Aus $QQ^T = I$ bekommen wir

$$det(QQ^T) = det(I) \Rightarrow det(Q) \cdot det(Q) = 1 \Rightarrow det(Q)^2 = 1 \Rightarrow |det(Q)| = 1.$$

(e) Den Betrag der Determinante von A kann entweder direkt ausrechnen oder $|det(A)| = |det(QR)| = |det(R)|$ ausnutzen. $\Rightarrow |det(A)| = 4$.

Aufgabe 3

Erzeugendensystem = alle Vektoren des $\mathbb{R}^4$ lassen sich als Linearkombination der gegebenen Vektoren schreiben.

Wir untersuchen das System

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

für beliebige a, b, c, d auf Lösbarkeit.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & c \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & d \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & 3/2 & b - a/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & c \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & d - 2c \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ der Rang der Systemmatrix=Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix für alle Werte von a, b, c, d
$\Rightarrow$ das System ist für alle Werte von a, b, c, d lösbar
$\Rightarrow$ M ist ein Erzeugendensystem

Alternative Begründung: Die ersten vier Vektoren von M sind schon eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Warum: Sie sind linear unabhängig (Begründung: Rechnung) und die Anzahl (vier) ist gleich der Raumdimension.