Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2006
C. Mehl/R. Nabben/R. Seiler 26. Juli 2006

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze Begründung an!
Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A.

(b) Überprüfen Sie, ob der folgende Vektor eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$ an.

2. Aufgabe

12 Punkte

(a) Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Mengen, ob es sich um einen Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ handelt:

$T_1 := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} | \; det(A) = 1\}, \quad T_2 := \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} | \; a \cdot b \cdot c \cdot d = 0\},$

$T_3 := \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} | a + b = c + d\}$

(b) Gegeben sei der Teilraum $T = span\{x^2, x^2 - x, x\}$ von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Bestimmen Sie die Dimension von T.

3. Aufgabe

8 Punkte

Durch $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ und $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Berechnen Sie $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\}$ des $\mathbb{R}^2$.

4. Aufgabe

12 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ eine Matrix mit dem Eigenvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert 0 und dem Eigenvektor $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert 2.

(a) Ist die Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ injektiv? Ist sie surjektiv?

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $(A - 2I_2)\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t)$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an.

(e) Ist A invertierbar? Falls ja, geben Sie eine Inverse an.

(f) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.