Lösungen Verständnisteil Oktoberklausur SS 06

Anmerkungen: Punkte werden von den Studenten verdient, nicht von den Korrekteuren gegeben.

Aufgabe 1

- F_1 ist keine lineare Abbildung: Der Nullvektor wird nicht auf den Nullvektor abgebildet.
- F_2 ist keine lineare Abbildung. Gegenbeispiel: $F_2\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,

  $F_2\left(2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$, damit ist $F_2\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\neq 2F_2\left(2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$.
- F_3 ist lineare Abbildung. Begründung:

$$F_3\left(\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\lambda F_3\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)$$

$$F_3\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=F_3\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)+F_3\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right)$$

- F_4 ist keine lineare Abbildung. Gegenbeispiel: $F_4\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$,

  $F_4\left(-\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, damit ist $F_4\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)\neq -F_4\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$.

Aufgabe 4

(a) Lineare Unabhängigkeit zeigen mit LGS und Koeffizientenvergleich.

$$\ldots$$

Nur triviale Nulldarstellung, darum l.u.

(b) p_1, p_3 ist linear unabhängig wegen (a) , $p_2 \in \text{Span}\,\{p_1, p_2\}$ wegen $p_2 = p_1 + p_3$. Also ist p_1, p_3 ein Erzeugendensystem von S, damit auch Basis.

(c) Mit Dimension = Anzahl Basiselemente: Dim(S)=2.

(d) Mit K als Koordinatenabbildung: $K(q_1) = (0, 0)$, $K(q_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $q_3 \notin S$.

Aufgabe 2

(a) Ja, z.B. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, diese hat $Kern \neq \{0\}$, also den EW 0 bzw. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist EV zum EW 0.

(b) AB ist auch invertierbar, weil $det(AB) = det(A)det(B) \neq 0$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ wegen $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$.

(c) Die Determinante von A ist nicht Null: $det(A) = det(A - 0 \cdot I) \neq 0$, da 0 kein Eigenwert ist. Damit ist A invertierbar.

(d) Es gilt $RR^T\vec{b} = \vec{b}$. R ist invertierbar, weil es eine orthogonale Matrix ist. Damit ist auch das LGS eindeutig lösbar.

(e) A ist weder in-, surj- noch bijektiv. Wegen $det(A) = 0$ ist A nicht invertierbar, $Kern(A) \neq \{0\}$, damit ist A nicht injektiv. Wegen dem Dimensionssatz ist dann auch $Bild(A) \neq \mathbb{R}^7$, damit ist A nicht surjektiv. Da A nicht injektiv und surjektiv ist, ist es auch nicht bijektiv.

Aufgabe 3

Es ist $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} 3\alpha e^{3t} \\ 0 \\ 3e^{3t} \end{bmatrix}$ und

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 3\alpha e^{3t} \\ \alpha e^{3t} - 2e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha e^{3t} \\ (\alpha - 2)e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Die beiden Seiten der Differentialgleichung sind nur dann gleich, wenn $\alpha - 2 = 0$ gilt, also $\alpha = 2$.

Für $\alpha = 2$ werden auch die Anfangsdaten angenommen:

$$\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} \alpha e^0 \\ 0 \\ e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Antwort also: $\alpha = 2$.