Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 06/07
R. Nabben/M. Scherfner/M. Scheutzow/R. Seiler/H. Winkler 11.04.2007

April – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

$$\text{Gegeben sind } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(b) Bestimmen Sie den Kern von A.

(c) Berechnen Sie die Dimension des Kerns von A.

(d) Bestimmen Sie den Rang von A.

(e) Bestimmen Sie zwei spezielle Lösungen des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.

2. Aufgabe 12 Punkte

$$\text{Gegeben ist die Matrix } B = [B_{ij}]_{i,j=1,..,4} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) $\lambda = -1$ ist ein Eigenwert von B. Berechnen Sie den Eigenraum $V_{\lambda=-1}$.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von B.

(c) Berechnen Sie die Normen $||B||_1$, $||B||_2$ und $||B||_3$ mit

$$||B||_1 := \max\{\sum_{j=1}^{4} |B_{ij}| : i = 1, \ldots, 4\} \quad , \quad ||B||_2 := \max\{|B_{ij}| : i,j = 1, \ldots, 4\},$$
$$||B||_3 := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } B\}.$$

(d) Bezüglich welcher Norm ist B am größten?

3. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit der Basis $\mathcal{B} = \{x\,,\, x-1\}$ und die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit $L(ax+b) = -ax + 2b$.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten von $p(x) = 4x - 3$ bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Gegeben ist eine weitere lineare Abbildung $G : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit darstellender Matrix $G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung $G \circ L$ bezüglich $\mathcal{B}$.

(d) Berechnen Sie $(G \circ L)(p)$ für das Polynom p aus (a).

4. Aufgabe 6 Punkte

Lösen Sie das AWP $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = M\vec{y}(t)$ mit $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, wobei $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ die Eigenwerte 0, 2 und 5 hat. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$V_{\lambda=0} = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}\,,\quad V_{\lambda=2} = \text{span}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}\,,\quad V_{\lambda=5} = \text{span}\{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$