Rechenteil

Aufgabe 1 (10 P)

$$a)\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{I\leftrightarrow II} \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III-2II} \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

also sind x_2, x_5 freie Variablen.

$$\begin{aligned} III: -2x_4 &= -2 - 2x_5 \\ x_4 &= 1 + x_5 \\ II: x_3 &= 1 - x_4 = 1 - (1 + x_5) = -x_5 \\ I: -x_1 &= -2x_2 - x_4 - x_5 \\ x_1 &= 2x_2 + 1 + x_5 + x_5 = 2x_2 + 1 + 2x_5 \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 1 + 2x_5 \\ x_2 \\ -x_5 \\ 1 + x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbb{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

b) Kern(A)= span $\{(2,1,0,0,0)^T, (2,0,-1,1,1)^T\}$. (Siehe $\mathbb{L}$ aus a))
c) Dim Kern(A)=2, weil die beiden Vekt. im span in b) lin. unabh.
d) Rang (A)=3, weil es in a) in der ZSF drei Köpfe gibt.
e) $\mathbf{(1,0,0,1,0)^T}$, $(1,0,0,1,0)^T + (2,1,0,0,0)^T = \mathbf{(3,1,0,1,0)^T}$ oder
$(1,0,0,1,0)^T + (2,0,-1,1,1)^T = \mathbf{(3,0,-1,2,1)^T}$ oder
$(1,0,0,1,0)^T - (2,1,0,0,0)^T = \mathbf{(-1,-1,0,1,0)^T}$

Aufgabe 2 (12 P)

$$a) B + E = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-I} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{IV+II} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Also sind x_3, x_4 freie Variablen.

$$\begin{aligned} II: -2x_2 &= 0 \\ I: 6x_1 &= 3x_3 - 3x_4 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ V_{\lambda=-1} &= \text{Kern } (B+E) = \text{span}\{(\frac{1}{2},0,1,0)^T, (-\frac{1}{2},0,0,1)^T\} \\ &= \text{span}\{(1,0,2,0)^T, (-1,0,0,2)^T)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\quad p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) = \det(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -4-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}) \\ &\overset{2.Z}{=} (-3-\lambda)\det(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 & 3 \\ 6 & -4-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}) \\ &\overset{3.Z}{=} (-3-\lambda)(-1-\lambda)\underbrace{\det(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{bmatrix})}_{=\lambda^2-\lambda-2} \end{aligned}$$

Entweder weiß man aus a), dass -1 doppelter Eigenwert ist und darum noch einmal auftreten muss, man teilt also $\lambda^2 - \lambda - 2$ durch $(\lambda + 1)$ oder man benutzt die p-q-Formel und erhält die Nullstellen -1 und 2.

$$p_B(\lambda) = \underbrace{(-3-\lambda)(-1-\lambda)}_{=(3+\lambda)(1+\lambda)}(1+\lambda)(\lambda-2).$$

Also lauten die Eigenwerte $-3, -1, 2$.

$$\begin{aligned} (3+\lambda)(1+\lambda) &= \lambda^2 + 4\lambda + 3 \;,\; (3+\lambda)(1+\lambda)^2 = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 \\ p_B(\lambda) &= \lambda^4 + 3\lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda - 6 \text{ hierfür keine Punkte, Ausmult. ist unnötig!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c)\quad ||B||_1 &= \max\{14, 3, 16, 3\} = 16 \\ ||B||_2 &= B_{31} = 6 \\ ||B||_3 &= \max\{|-3|, |-1|, |2|\} = \max\{3, 1, 2\} = 3 \end{aligned}$$

d) $||B||_1$ ist am größten: $3 \leq 16$, $6 \leq 16$.

Aufgabe 3 (12 P)

$$a)\quad 4x-3 = \lambda_1 x + \lambda_2(x-1)\,(= x(\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4 &=& \lambda_1+\lambda_2 \\ -3 &=& -\lambda_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 &=& 3 \\ \lambda_1 &=& 4-\lambda_2 = 1 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow K_B(4x-3) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

b) Bilder der Basisvektoren: $L(x) = -x\,,\quad L(x-1) = -x-2$

Alternative Loesungsmethoden fuer die Koordinaten der Bilder.

$$K_B(-x) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \text{ weil } -1\cdot x + 0(x-1) = -x$$

$$-x-2 = \lambda_1(x) + \lambda_2(x-1)\,(= x(\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -1 &=& \lambda_1+\lambda_2 \\ -2 &=& -\lambda_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 &=& 2 \\ \lambda_1 &=& -1-\lambda_2 = -3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow K_B(-x-2) = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

$$L_B = [K_B(L(x))\,,\, K_B(L(x-1))] = \begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$c)\quad G_B L_B = \begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 9\\ -2 & -6\end{bmatrix}$$

$$d)\, G_B L_B\, K_B(4x-3) = \begin{bmatrix}1 & 9\\ -2 & -6\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}28\\-20\end{pmatrix}$$

$$(G\circ L)(4x-3) = K_B^{-1}(G_B L_B\, K_B(4x-3)) = 28x + (-20)(x-1) = 8x+20$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_{\le 1}[x] \arrow[r, "L"] \arrow[rr, bend left, "G\circ L"] \arrow[d, "K_B"'] & \mathbb{R}_{\le 1}[x] \arrow[r, "G"] \arrow[d, "K_B"] & \mathbb{R}_{\le 1}[x] \arrow[d, "K_B"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "L_B"] \arrow[rr, bend right, "G_B\cdot L_B"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "G_B"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
4x-3 \arrow[r, "G\circ L"] \arrow[d, "K_B"] & 8x+20 \\
\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \arrow[r, "G_B\cdot L_B"'] & \begin{pmatrix}28\\-20\end{pmatrix} \arrow[u, "K_B^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$G\circ L(4x-3) = K_B^{-1}\left(G_B L_B\left(K_B(4x-3)\right)\right)$$

Aufgabe 4 (6P)

a) Aus der Aufgabenstellung ablesbar (Reihenfolge von Eigenwerten in D und Eigenvektoren in S muss passen!)

$$S = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

Berechnung S^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{III-I} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{(-1)III} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[II+2III]{I-2III} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array}\right] \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Lösung des AWP mit der Exponentialformel

$$y(t) = e^{tM}y_0 = Se^{tD}S^{-1}y_0$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{5t}\end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2e^{5t}\\ 0 & e^{2t} & -2e^{5t}\\ 1 & 0 & e^{5t}\end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}-2+4\\ 4+3-4\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2\\3e^{2t}\\2\end{pmatrix}$$

oder alternativ schrittweise ausmultiplizieren.

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{5t}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\3e^{2t}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3e^{2t}\\2\end{pmatrix}$$