Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 06/07
R. Nabben/M. Scherfner/M. Scheutzow/R. Seiler/H. Winkler 11.04.2007

April – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben. Sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Auf Antworten ohne Begründung gibt es keine Punkte.

1. Aufgabe

9 Punkte

(a) Bestimmen Sie aus $p_1, \ldots, p_5$ drei linear abhängige Polynome:

$$p_1(x) = x^2 - x \quad , \quad p_2(x) = 2x + 2 \quad , \quad p_3(x) = x^2 - 4\,,$$
$$p_4(x) = x^2 + 2x - 2 \quad , \quad p_5(x) = -x^2 + x\,.$$

(b) Gegeben sind $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ und $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Es ist $\vec{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert -1 und $\vec{w}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert 2.

(i) Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig?

(ii) Sind $\vec{w}$ und $A\vec{w}$ linear unabhängig?

2. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie mit kurzer Begründung von der Einheitsmatrix und der Nullmatrix verschiedene Matrizen, die die genannten Eigenschaften besitzen.

(a) $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $\binom{1}{2} \in$ Bild(A).

(b) $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ nicht orthogonal mit $\det B = 1$.

(c) $C \in \mathbb{R}^{\mathbf{3,2}}$ mit $\binom{1}{2} \in$ Kern(C).

(d) $D \in \mathbb{R}^{2,2}$ antisymmetrisch und invertierbar.

3. Aufgabe

11 Punkte

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind.

(a) $L_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $L_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}\right)$

(b) $L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 2 \end{bmatrix}\right)$

(c) $L_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{bmatrix}\right)$

4. Aufgabe

10 Punkte

(a) Nach Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^{100}$ erhält man die Vektoren $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ mit $||\vec{w}_1|| = 1$ und $\vec{w}_2 = \frac{\vec{l}_2}{||\vec{l}_2||}$ mit

$$\vec{l}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{l}_2$ und $\vec{w}_1$ orthogonal bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

(b) Gegeben ist das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ im $\mathbb{R}^3$ mit

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle_b := x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$?

(c) Berechnen Sie die Norm von $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der zu dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ aus Aufgabenteil (b) assoziierten Norm.