Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 07

C. Mehl/K. Roegner/R. Seiler 25.07.2007

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$ und $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.

(b) Geben Sie eine Basis des Kerns von A an.

(c) Geben Sie eine Basis des Bildes von A an.

2. Aufgabe 7 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

und die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Berechnen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass die Determinante der Matrix A gleich 6 ist und die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

3. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und die Basis $\mathcal{B} := \{x+1, x+2\}$ von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$L: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \rightarrow & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ ax+b & \mapsto & (3a-b)x + (a+b) \end{array}$$

bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

4. Aufgabe 13 Punkte

Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \vec{v}_1 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und dessen assoziierter Norm.

(a) Zeigen Sie anhand einer Rechnung, dass $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ orthonormiert sind (d.h. $\vec{v}_1$ ist orthogonal zu $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind normiert).

(b) Benutzen Sie das Gram-Schmidt Verfahren, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ des $\mathbb{R}^3$ zu überführen.