TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: C. Mehl/K. Roegner/R. Seiler Sommersemester 2007
Assistenten: E. Ludwig/K. Roegner/D. Timmreck
`www.moses.tu-berlin.de/Mathematik/`

Lösungsvorschläge - Rechenteil

(a) (10 Punkte) Gegeben sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$ und $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.
EKM $[A|\vec{b}]$ in (N)ZSF bringen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{III}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}-3\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(1/3)\text{III}-(1/4)\text{II}]{(-1/4)\text{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{\text{ZSF}} \quad \left(\text{ oder } \xrightarrow{\text{I}-4\text{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{\text{NZSF}} \right)$$

Löse für die Kopfvariablen x_1, x_2:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_4 & = & -2 \\ x_2 & - & x_4 & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -2 & - & 3x_4 \\ x_2 & = & 1 & + & x_4 \end{array}$$

Wähle zwei Parameter λ_1, λ_2 für die Nichtkopfvariablen x_3, x_4:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 - 3\lambda_2 \\ 1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Geben Sie eine Basis des Kerns von A an.

$$\text{Basis Kern } A : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Geben Sie eine Basis des Bildes von A an.
Kopfvar. in Spalte I und II $\Rightarrow$ erste zwei Spalten von A bilden eine Basis des Bildes von A:

$$\text{Basis Bild } A : \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Alternativ (nach dem alten Algorithmus):

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{IV}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-2\text{I},\text{V}-3\text{I}]{\text{II}-5\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-\text{II},\text{V}-2\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{transponieren}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Basis Bild } A : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) (7 Punkte) Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

und die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Berechnen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass die Determinante der Matrix A gleich 6 ist und die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

$$\det A \overset{\text{(Entw. nach 4. Spalte:)}}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{(Entw. nach 3. Spalte:)}}{=} -1 \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-c) = c - a = 6$$

Spalten von A orthogonal $\Rightarrow \langle \text{Spalte}\, i, \text{Spalte}\, j \rangle = 0, i \neq j$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = a + c = 0 \qquad \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = b = 0 \qquad \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = d = 0$$

$$\begin{array}{rcrcl} a & + & c & = & 0 \\ -a & + & c & = & 6 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2c = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 3 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

$$a = -3, b = 0, c = 3, d = 0$$

(c) (10 Punkte) Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und die Menge $\mathcal{B} := \{x+1, x+2\}$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Gesucht: Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x+2) = ax + b$

$$\overset{\text{Koeff.vgl.}}{\Rightarrow} \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & a \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & b \Rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \Rightarrow \lambda_2 & = & b - a \\ \lambda_1 & = & a - \lambda_2 = 2a - b \end{array}$$

$$K_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \Rightarrow \mathbb{R}^2;\ ax + b \mapsto \begin{bmatrix} 2a - b \\ b - a \end{bmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} L: & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ & ax + b & \mapsto & (3a - b)x + (a + b) \end{array}$$

bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Bild der Basisvektoren berechnen:

$$L(x+1) = 2x + 2 \qquad L(x+2) = x + 3$$

Koordinatenvektoren der Bilder berechnen (siehe Teil (a)):

$$K_{\mathcal{B}}(2x+2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K_{\mathcal{B}}(x+3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Die Koordinatenvektoren bilden die Spalten von $L_{\mathcal{B}}$:

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(d) (13 Punkte) Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \vec{v}_1 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und dessen assoziierter Norm.

(a) Zeigen Sie anhand einer Rechnung, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ orthonormiert sind (d.h. $\vec{v}_1$ ist orthogonal zu $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ normiert sind).

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{-4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ orthogonal}$$

$$||\vec{v}_1|| = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 \text{ normiert}$$

$$||\vec{v}_2|| = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1 \qquad \Rightarrow \vec{v}_2 \text{ normiert}$$

(b) Benutzen Sie das Gram-Schmidt Verfahren, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Standardskalarproduktes zu überführen.

Weil die erste zwei Vektoren schon orthoromiert sind, liefert das Gram-Schmidt Verfahren $\vec{q}_1 = \vec{v}_1, \vec{q}_2 = \vec{v}_2$.
(Hier kann man auch Gram-Schmidt anwenden. Das gleiche kommt raus.)
Um den dritten Basisvektor $\vec{q}_3$ zu bestimmen, berechnen wir zuerst das Lot von $\vec{v}_3$ auf die von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ aufgespannte Ebene:
$\ell_3 := \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_3 \text{ normieren: } \vec{q}_3 := \frac{\ell_3}{||\ell_3||} \quad \text{mit} \quad ||\ell_3|| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow \vec{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\}$$