Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
C. Mehl/K. Roegner/R. Seiler

SS 07
10.10.2007

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben. Sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze, aber vollständige Begründung an! Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe

15 Punkte

Die Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei linear mit

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B} := \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ mit

$$\vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie ein vom Nullvektor verschiedenes Element in Kern L.

(c) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert 0.

(d) Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von L bzw. des Kerns von L.

(e) Ist L injektiv / surjektiv / bijektiv?

2. Aufgabe

9 Punkte

Die Vektoren

$$\vec{c}_1 := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; \vec{c}_2 := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; \vec{c}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

(a) Geben Sie die Inverse C^{-1} der Matrix $C := [\vec{c}_1 \;\; \vec{c}_2 \;\; \vec{c}_3]$ an.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\vec{v} := \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$ bzgl. der Basis $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $C\vec{x} = \vec{c}_2$.

(d) Bestimmen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ aufgespannten Spates.

3. Aufgabe

7 Punkte

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen reelle 2×2 Matrizen A und $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, so dass die Aussage gilt, wobei $\tilde{A}$ die normierte Zeilenstufenform (NZSF) von A ist.

(a) Die beiden Zeilen von A sind nicht gleich, und $\tilde{A}$ enthält eine Nullzeile.

(b) Die Eigenwerte von A haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1, und der Eigenwert von $\tilde{A}$ hat die algebraische Vielfachheit 2. Geben Sie jeweils die Eigenwerte der Matrizen A und $\tilde{A}$ an.

(c) A ist symmetrisch, aber $\tilde{A}$ ist nicht symmetrisch.

4. Aufgabe

9 Punkte

Prüfen Sie jeweils, ob die gegebenen Abbildungen linear sind.

$$\begin{array}{rccc} L_1 : & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ & ax^2 + bx + c & \mapsto & cx^2 + x - a \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} L_2 : & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \\ & ax + b & \mapsto & 3ax^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} L_3 : & \mathbb{R}_{\leq 2}[x] & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ & ax^2 + bx + c & \mapsto & ax - bc \end{array}$$